

ÜBER DIE ANZAHL VON LÖSUNGEN ELLIPTISCHER RANDWERT- PROBLEME UNTER NICHTLINEAREN RANDBEDINGUNGEN

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
an der Abteilung für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

von
Friedhelm Inkmann
aus Gelsenkirchen

Bochum 1979



Digitized by the Internet Archive
in 2026

ÜBER DIE ANZAHL VON LÖSUNGEN ELLIPTISCHER RANDWERT- PROBLEME UNTER NICHTLINEAREN RANDBEDINGUNGEN

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
an der Abteilung für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

von
Friedhelm Inkmann
aus Gelsenkirchen

Bochum 1979



Dissertation eingereicht am 30. 5. 1979

Tag der mündlichen Prüfung 29. 6. 1979

Dekan: Prof. Dr. V. Baumann

Referent: Prof. Dr. H. Amann (Kiel)

Korreferent: Prof. Dr. E. Zehnder

Inhaltsverzeichnis

o. Einleitung	S. 1
1. Problemstellung und eine a-priori-Abschätzung	S. 6
2. Die Lösung der Hilfsgleichung	S. 19
3. Einige Existenz- und Multiplizitätsresultate für elliptische Differentialgleichungen unter nichtlinearen Randbedingungen	S. 32
4. Bemerkungen zum linearen Eigenwertproblem	S. 44
5. Ein invariantes Kriterium für die Existenz von Unter- und Oberlösungen	S. 48
6. Die Existenz einer Lösung im Falle parameterabhängiger Nichtlinearitäten	S. 60
7. Ein Multiplizitätssatz für mild nichtlineare elliptische Aufgaben	S. 74
Literaturverzeichnis	S. 82

0. Einleitung

Es sei A ein gleichmäßig stark elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung und B ein Randoperator erster Ordnung. Wir beschäftigen uns unter dem Gesichtspunkt der Existenz und Vielfachheit von Lösungen mit semilinearen Aufgaben des Typs

$$(0.1) \quad \begin{aligned} Au &= f(x, u, Du) && \text{in } \Omega \\ Bu &= g(x, u) && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wo Du der Gradient der gesuchten Funktion u und $\bar{\Omega}$ eine kompakte Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^N$ ist und f höchstens quadratisch in der dritten Variablen wächst. Gesucht sind Lösungen in $W_p^2(\Omega)$ mit $p > N$; d.h. die Differentialgleichung möge f.ü. in Ω punktweise und die Randbedingung punktweise für $x \in \partial\Omega$ erfüllt sein. Es sei darauf hingewiesen, daß dies Sinn macht, weil $W_p^2(\Omega)$ in $C^1(\bar{\Omega})$ eingebettet ist ([1, Thm. 5.4]).

Hat man erst einmal solche W_p^2 -Lösungen gefunden, hängt die Regularität der Lösungen und damit ihre Eigenschaft, "klassisch" zu sein, nur noch von der Regularität der Daten ab, wie durch die üblichen "bootstrapping"-Argumente aus der Regularitätstheorie elliptischer Gleichungen folgt (e.g. [2, 15, 16, 22]).

Die Bedeutung der Aufgabe (0.1) erklärt sich einerseits daraus, daß die Mathematisierung verschiedenster Probleme aus der Physik oder Chemie auf nichtlineare elliptische Gleichungen führt, andererseits aber auch aus der Beobachtung, daß (0.1) invariant unter Transforma-

tionen $v = F(u)$ ist, wobei F ein C^2 -Diffeomorphismus sei, wie in [19] bemerkt worden ist. Dort jedoch war noch die Einschränkung $F(0) = 0$ notwendig, was damit zusammenhängt, daß diese Autoren sich auf homogene Dirichlet-Randbedingungen beschränken. Betrachtet man auch andere Randoperatoren, wird man in natürlicher Weise zu (0.1) geführt.

Für den mild nichtlinearen Fall $f(x, \xi) = f(x, \xi, \eta)$ bei homogenen Randbedingungen gibt es mannigfache Literatur, in der z. B. die Existenz von Lösungen mittels eines monotonen Iterationsschemas aus der Existenz von Ober- und Unterlösungen gefolgert wird, eine Methode, mit der man auch Multiplizitätsresultate erhalten kann (vgl. [4]). Andere Arbeiten (e.g. [20]) beschäftigen sich mit der Frage, wie man sich solche Ober- und Unterlösungen verschafft, oder studieren Resonanzprobleme ([14, 23]).

Der mild nichtlineare Fall unter nichtlinearen Randbedingungen wird z. B. von Amann [3], Schmitt [29] und Hess [17] (letzterer unter dem Gesichtspunkt der Existenz schwacher Lösungen) untersucht; ein optimales Resultat erhält Amann in [7], wo er die Äquivalenz der Randwertaufgabe

$$(0.2) \quad \begin{aligned} Au &= f(x, u) && \text{in } \Omega \\ Bu &= g(x, u) && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit einer Fixpunktgleichung in $C(\overline{\Omega})$ beweist, wobei der dabei auftretende Fixpunktoperator stark positiv ist. U. a. wegen der Normalität des Kegels der nichtnegativen Funktionen in $C(\overline{\Omega})$ werden viele der in

[4] vorgestellten abstrakten Ergebnisse (z. B. Aussagen über Multiplizität, Behandlung nichtlinearer Eigenwertprobleme) auf die Aufgabe (o.2) anwendbar.

Im Falle, daß die rechte Seite der Differentialgleichung noch vom Gradienten abhängt, hat sich herausgestellt, daß selbst dann, wenn man Unter- und Oberlösungen kennt, die Existenz einer Lösung stark vom Wachstum von f in der dritten Variablen abhängt (e.g. [21, 29]). Zwar kann man mit geeigneten Methoden (Variationsmethoden wie in [12, 18], Schauder'scher Fixpunktsatz wie in [21]) sogar quasilineare Gleichungen behandeln, sofern homogene oder zumindest lineare Randbedingungen vorausgesetzt werden, aber in keiner dieser Arbeiten wird über die bloße Existenzaussage hinaus auch etwas über die Anzahl der Lösungen gesagt. Dies gilt ebenso für die auf das semilineare Problem zugeschnittenen Arbeiten von Brill [11], der sogar nichtlineare Randbedingungen zulassen kann, aber höchstens lineares Wachstum von f in der dritten Variablen gestattet, und von Puel [28], der immerhin schon subquadratisches Wachstum erlaubt.

Multiplizitätsaussagen für semilineare Gleichungen mit linearen Randbedingungen sind erstmals in [5] und [7] zu finden, wobei beide Arbeiten zwar ähnliche Resultate erhalten, aber unterschiedliche Wege gehen. Diese Aussagen beruhen auf der Anwendung abstrakter Sätze aus [4], wobei es nötig ist, die Lösungen des Randwertproblems mit den Fixpunkten eines *wachsenden* Operators in einem geeigneten geordneten Banachraum zu assoziieren. In [5] erreicht der Autor dieses Ziel, indem er die Multiplizität von periodischen Lösungen parabolischer Differen-

tialgleichungen - der wachsende Operator ist hier der Poincaré-Operator - durch Verschwindenlassen der Periode ($T \rightarrow 0$) auf die elliptische Situation überträgt. Die Idee, die [7] zugrundeliegt und auch den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bildet, besteht darin, zunächst das Problem

$$\begin{aligned} u + \lambda(Au - f(x, u, h(Du))) &= d && \text{in } \Omega \\ Bu &= g(x, \phi) && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für gewisse $(d, \phi) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ durch eine W_p^2 -Funktion $u = T(d, \cdot)$ zu lösen, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $h \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ so gewählt werden können, daß einerseits S mit $S(u) := T(u, u)$ kompakt ist und monoton wächst und andererseits gewisse Lösungen von (0.1) gerade die Fixpunkte von S in einer geeigneten Teilmenge von $C^1(\overline{\Omega})$ sind. Die Existenz und Multiplizität von Fixpunkten können dann mit Hilfe von Methoden gezeigt werden, die denen im Übersichtsartikel [4] entsprechen.

Auch wenn die Frage der Lösbarkeit des Problems (0.1) wie auch in [6] auf die Frage nach der Existenz von Fixpunkten eines nichtlinearen wachsenden Operators in einem geeigneten Banachraum E zurückgeführt wird, so gibt es doch einen wesentlichen Unterschied. Hier - übrigens genau wie in [7] - ist nämlich der Operator lediglich auf einer Teilmenge von E definiert, die höchstens das Ordnungsintervall $[\bar{v}, \hat{v}]_E = \{\bar{v} \leq u \leq \hat{v} \mid u \in E\}$ umfaßt (wobei $\bar{v}$ bzw. $\hat{v}$ Unter- bzw. Oberlösung sind), so daß es überhaupt nur möglich ist, mittels der Fixpunktgleichung die Lösungen von (0.1) zwischen $\bar{v}$ und $\hat{v}$ zu erreichen.

Gegenüber der in [6] dargestellten Situation ist das eine starke Einschränkung, die letztlich auch der Grund dafür ist, daß wir, wenn

wir am Schluß dieser Arbeit ein Ergebnis von Amann und Hess verallgemeinern ([8]), wo die Multiplizität von Lösungen der Aufgabe

$$Au = f(x, u, t) \quad \text{in} \quad \Omega$$

$$Bu = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

mit parameterabhängiger rechter Seite studiert wird, nur das mild nichtlineare Problem für Differentialgleichung und Randbedingung behandeln können.

Zuvor (§§ 5-6) beschäftigen wir uns noch mit Bedingungen, die die Existenz von Unter- und Oberlösungen implizieren, auch im Falle parameterabhängiger rechter Seiten. Wir folgen dabei den schon erwähnten Arbeiten von Kazdan, Kramer und Warner [19, 20]. Wie in [19] kommt es darauf an, das semilineare Problem durch geeignete Transformationen auf mild nichtlineare Aufgaben zu reduzieren, wo das Arbeiten erheblich leichter ist.

Herrn Prof. Dr. H. Amann möchte ich für die Anregung zur Behandlung dieses Themas und für seine stete Gesprächsbereitschaft herzlich danken.

1. Problemstellung und eine a-priori-Abschätzung

Eine Klasse von semilinearen elliptischen Differentialgleichungen mit nichtlinearen Randbedingungen soll auf die Existenz und auf die Anzahl von Lösungen untersucht werden. In diesem Paragraphen wird insbesondere eine a-priori-Abschätzung hergeleitet, die es ermöglichen wird, auf die Existenz mindestens einer Lösung zu schließen, sofern bekannt ist, daß eine Unter- und eine Oberlösung existieren.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sei eine offene Menge derart, daß $\bar{\Omega}$ eine kompakte, berandete C^2 -Mannigfaltigkeit ist, insbesondere liegt Ω also lokal auf einer Seite von $\partial\Omega$.

A sei der folgende lineare elliptische Differentialoperator

$$(1.1) \quad Au := - \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) D_j D_k u + \sum_{j=1}^N a_j(x) D_j u + a_0(x) u$$

mit $a_{jk}, a_j, a_0 \in C(\bar{\Omega})$, $a_{jk} = a_{kj}$. A sei gleichmäßig stark elliptisch, d.h. es gebe eine Konstante $\mu > 0$, so daß für $x \in \bar{\Omega}$ und $\eta \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$\sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) \eta_j \eta_k \geq \mu |\eta|^2$$

B sei der Randoperator für das Neumannsche Randwertproblem oder - allgemeiner - für das "regular oblique derivative boundary value problem", also

$$(1.2) \quad Bu := \frac{\partial u}{\partial \beta} + b_0(x) u,$$

wobei $\beta \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$ ein "nach außen zeigendes", nirgends tangentiales

Vektorfeld sei und $b_0 \in C^1(\partial\Omega)$ gelte.

Bemerkung:

Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind alle auftretenden Funktionen reellwertig. Es sei also stets $C^k(\bar{\Omega}) = C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ etc.

Wir interessieren uns nun für die folgende elliptische Randwertaufgabe

$$(1.3) \quad \begin{aligned} Au &= f(x, u, Du) && \text{in } \Omega \\ Bu &= g(x, u) && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit stetigen Nichtlinearitäten $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; später werden wir schärfere Forderungen an die Regularität von f und g stellen.

Die Lösungen sollen im Sobolevraum $W_p^2(\Omega)$ mit $p > N$ gesucht werden; die Einschränkung von p garantiert die Gültigkeit von Einbettungssätzen des Sobolev-Kondrachovschen Typs (e.g. [1, chap. 4,5]), so daß z.B. $W_p^k(\Omega)$ kompakt in $C^{k-1}(\bar{\Omega})$, $k = 1, 2$, eingebettet ist.

$u \in W_p^2(\Omega)$ heißt nun eine Lösung von (1.3), falls

$$\begin{aligned} Au(x) &= f(x, u(x), Du(x)) && \text{für fast alle } x \in \Omega \\ \text{und } Bu(x) &= g(x, u(x)) && \text{für alle } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

gelten. Falls zusätzlich $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ist, heißt u eine

klassische Lösung; bei genügend glatten Koeffizienten der Operatoren

A und B , glatten rechten Seiten f und g sowie glattem Rand $\partial\Omega$ ist jede

Lösung klassisch, wie aus der L_p -Theorie und der Schander-Theorie (e.g. [2]) für elliptische Aufgaben folgt.

$u \in W_p^2(\Omega)$ heißt eine Oberlösung von (1.3), falls

$$Au(x) \geq f(x, u(x), Du(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega$$

$$\text{und } Bu(x) \geq g(x, u(x)) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega$$

gelten. Eine Oberlösung heißt strikt, falls sie keine Lösung ist.

Analog sind Unterlösungen und strikte Unterlösungen definiert.

Bevor wir die angekündigte a-priori-Abschätzung formulieren und beweisen, sind noch einige Vorbereitungen notwendig. Zunächst eine

Definition:

Für $\sigma = m + s$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < s < 1$, und $q > 1$ sei der Sobolevraum $W_q^\sigma(\Omega)$ der Raum jener Funktionen u aus $W_q^m(\Omega)$, für die $\|u\|_{\sigma, q, \Omega} = \|u\|_{W_q^\sigma(\Omega)}$ endlich ist, wobei

$$\|u\|_{\sigma, q, \Omega} := (\|u\|_{m, q}^q + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^q}{|x - y|^{N+qs}} dx dy)^{1/q}$$

gelte. $\|\cdot\|_{m, q}$ kennzeichnet dabei natürlich die Norm von $W_q^m(\Omega)$. Falls keine Mißverständnisse zu befürchten sind, lassen wir oben den Index Ω weg.

Bemerkung:

Die von Adams [1, chap. 7] definierten Räume $W_q^\sigma(\Omega)$ stimmen mit den obigen überein [1, 7.48]. Insbesondere wird $W_q^\sigma(\Omega)$ durch die Norm $\|\cdot\|_{\sigma, q}$ ein Banachraum.

Wir brauchen Sobolevräume mit gebrochenen Exponenten bestehend aus auf $\partial\Omega$ definierten Funktionen. Bei der Definition gehen wir vor wie in [1,7.51]:

Da Ω von der Klasse C^2 ist, gibt es beschränkte offene Mengen $U_j \subset \mathbb{R}^N$, $j = 1, \dots, M$, die $\partial\Omega$ überdecken. Außerdem existieren C^2 -Diffeomorphismen $\varphi_j: U_j \rightarrow \mathbb{B}^N$, $\mathbb{B}^N := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\}$, mit

$$\varphi_j(U_j \cap \Omega) = \mathbb{B}_+^N := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x^N > 0\} \cap \mathbb{B}^N$$

und $\varphi_j(U_j \cap \partial\Omega) = \Sigma^N := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x^N = 0\} \cap \mathbb{B}^N$.

$\{\pi_j \mid j = 1, \dots, M\}$ sei eine C^2 -Zerlegung der Eins auf $\partial\Omega$, die $\{U_j \mid j = 1, \dots, M\}$ untergeordnet ist. Schließlich sei für $v: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{B}^{N-1}$ $\varphi_j^*(v)(x) := v(\varphi_j^{-1}(x), 0)$.

Definition:

Für $s = m + \sigma$, $m = 0, 1, \dots$, $0 < \sigma < 1$, $q > 1$ und $N \geq 2$ sei

$$W_q^s(\partial\Omega) := \{u: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi_j^*(\pi_j u) \in W_q^s(\mathbb{B}^{N-1}) \text{ für } j = 1, \dots, M\}.$$

Zusammen mit der Norm $\|\cdot\|_{s,q,\partial\Omega}$,

$$\|u\|_{s,q,\partial\Omega} := \left(\sum_{j=1}^M \|\varphi_j^*(\pi_j u)\|_{s,q,\mathbb{B}^{N-1}}^q \right)^{1/q},$$

wird $W_q^s(\partial\Omega)$ ein Banachraum, dessen Norm bis auf Äquivalenz nicht von der speziellen Wahl der lokalen Koordinaten $\{(U_j, \varphi_j)\}$ und der Zerlegung $\{\pi_j\}$ abhängt (vgl. [24, prop. 29]).

Bemerkung:

Wir erinnern daran, daß die Spurabbildung $\text{tr}: C^2(\overline{\Omega}) \rightarrow W_q^{m-1/q}(\partial\Omega)$,

$\text{tr}(u) := u|_{\partial\Omega}$, eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $\text{tr} \in \mathcal{L}(W_q^m(\Omega), W_q^{m-1/q}(\partial\Omega))$ hat, $m = 1, 2$, die linear und surjektiv ist. [1, Thm. 7.53].

(1.1) Lemma

$g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei lokal lipschitzstetig (d.h. für jedes kompakte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Konstante $\gamma(I) > 0$ mit $|g(x, \xi) - g(x', \xi')| \leq \gamma(I) \cdot (|x - x'| + |\xi - \xi'|)$ für alle $(x, \xi), (x', \xi') \in \partial\Omega \times I$).

Dann existiert eine monoton wachsende Funktion $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, die nur von $g, \partial\Omega, p$ und N abhängt, so daß für jedes $u \in W_p^1(\Omega)$ gilt

$$g(\cdot, u) \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

und

$$(1.4) \quad \|g(\cdot, u)\|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)} \leq \alpha(\|u\|_{C(\overline{\Omega})}) (1 + \|u\|_{W_p^1(\Omega)}).$$

Beweis:

Die Behauptung macht Sinn, da $W_p^1(\Omega)$ in $C(\overline{\Omega})$ eingebettet ist.

Mit denselben Bezeichnungen wie oben werden wir als erstes

$\|\varphi_j^*(\pi_j G(u))\|_{\sigma, p, \mathbb{B}^{N-1}}$ abschätzen; dabei seien

$\sigma := 1 - 1/p$ und G der Nemytskii-Operator von g . Für $l \in \mathbb{N}$ sei $I_l := [-l, l]$; es gibt also Konstanten $\gamma_l > 0$ mit $|g(x, \xi) - g(x', \xi')| \leq \gamma_l (|x - x'| + |\xi - \xi'|)$ für $(x, \xi), (x', \xi') \in \partial\Omega \times I_l$.

l und j seien jetzt vorläufig fest gewählt, und es sei $u \in W_p^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq 1$. Die im folgenden auftretenden Konstanten seien alle mit

c bezeichnet, sofern sie nicht von u abhängen. Zur Abkürzung sei

$v := \varphi_j^*(\pi_j G(u))$ gesetzt. Nun gilt

$$\|v\|_{\sigma,p,B^{N-1}}^p = \int_{B^{N-1}} \int_{B^{N-1}} \frac{|v(\bar{x}) - v(\bar{y})|^p}{|\bar{x} - \bar{y}|^{N-2+p}} d\bar{x} d\bar{y}.$$

Es ist $|v(\bar{x}) - v(\bar{y})| = |\pi_j(x)g(x, u(x)) - \pi_j(y)g(y, u(y))|$

mit $x := \varphi_j^{-1}(\bar{x}, 0)$, $y := \varphi_j^{-1}(\bar{y}, 0)$ für $\bar{x}, \bar{y} \in B^{N-1}$, so

daß $x, y \in \partial\Omega$. Da g auf dem Kompaktum $\partial\Omega \times I_1$ beschränkt und lipschitzstetig ist, ebenso wie π_j , folgt

$$\begin{aligned} |v(\bar{x}) - v(\bar{y})| &\leq |\pi_j(y)| |g(x, u(x)) - g(y, u(y))| + |g(x, u(x))| |\pi_j(x) - \pi_j(y)| \\ &\leq (\gamma_1 + c) |x - y| + \gamma_1 |\pi_j(y)| |u(x) - u(y)| \\ &\leq (\gamma_1 + c) |x - y| + \gamma_1 |\pi_j(x)u(x) - \pi_j(y)u(y)| + \gamma_1 |u(x)| |\pi_j(x) - \pi_j(y)| \\ &\leq (\gamma_1 + c + \gamma_1 c) |x - y| + \gamma_1 |\pi_j(x)u(x) - \pi_j(y)u(y)|. \end{aligned}$$

Umbenennen der Konstanten und Einsetzen liefert nun

$$\begin{aligned} \|v\|_{\sigma,p,B^{N-1}}^p &\leq c \int_{B^{N-1}} \int_{B^{N-1}} \frac{|\bar{x} - \bar{y}|^p}{|\bar{x} - \bar{y}|^{N-2+p}} d\bar{x} d\bar{y} + \\ &+ c \int_{B^{N-1}} \int_{B^{N-1}} \frac{|\varphi_j^*(\pi_j u)(\bar{x}) - \varphi_j^*(\pi_j u)(\bar{y})|^p}{|\bar{x} - \bar{y}|^{N-2+p}} d\bar{x} d\bar{y}, \end{aligned}$$

denn auch φ_j^{-1} ist lipschitzstetig. Da das Integral im ersten Summanden schwach singulär ist, also konvergiert, gilt weiter

$$\|v\|_{\sigma,p,B^{N-1}}^p \leq c(1 + \|\varphi_j^*(\pi_j u)\|_{\sigma,p,B^{N-1}}^p).$$

Durch Summation über j folgt sofort

$$\|G(u)\|_{\sigma, p, \partial\Omega} \leq c(1 + \|tr(u)\|_{\sigma, p, \partial\Omega}) \leq \alpha_1(1 + \|u\|_{1, p, \Omega}).$$

Diese Ungleichung gilt, wie gesagt, für alle $u \in W_p^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = 1$, wobei $\alpha_1 > 0$ eine nur von $l, g, \partial\Omega, p$ und N abhängige Konstante ist. Die Behauptung folgt nun durch einen Standardtrick: Ohne Einschränkung ist (α_l) monoton steigend; man setze $\alpha(r) := \alpha_l$ für $r \in [l-1, l]$, $l = 1, 2, 3, \dots$, und $\alpha(0) := \alpha_1$. $\square$

Bemerkung:

Das obige Lemma ist eine Präzisierung des Lemmas (3.1) in [6], die für unsere Zwecke notwendig ist.

Wir formulieren nun die angekündigte a-priori-Abschätzung:

(1.2) Satz

$f: \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und habe höchstens quadratisches Wachstum bzgl. n . ($(x, \xi, n) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ bezeichne einen generischen Punkt), d.h. es existiere eine monoton wachsende Funktion $c: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$(1.5) \quad |f(x, \xi, n)| \leq c(|\xi|)(1 + |n|^2) \quad \text{für } (x, \xi, n) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

$g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei lokal lipschitzstetig.

Dann gibt es eine monoton wachsende Funktion $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, so daß für jede Lösung $u \in W_p^2(\Omega)$ von (1.3) gilt:

$$(1.6) \quad \|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq \gamma(\|u\|_{C(\overline{\Omega})}).$$

γ hängt dabei nur von A, B, Ω, N, p, c und g ab.

Bemerkung:

In [22, chap. 10,2] wird ebenfalls eine a-priori-Abschätzung für Lösungen von elliptischen Gleichungen mit nichtlinearen Randbedingungen bewiesen, allerdings muß (A,B) dabei formal selbstadjungiert sein; außerdem fordern diese Autorinnen stärkere Regularität für die Koeffizienten von A . Tomi [30] hat diese Voraussetzungen erstmals fallen lassen können im Fall des Dirichletproblems; in [7] wird das Neumann- und das dritte Randwertproblem eingeschlossen. Die Beweismethode der beiden letzten Arbeiten verwenden auch wir.

Es wird genügen, das folgende Resultat zu beweisen.

(1.3) Lemma

Für jedes $b \in L_\infty(\Omega)$ und jedes $a \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ gibt es genau eine Lösung $u \in W_p^2(\Omega)$ der Aufgabe

$$(1.7) \quad \begin{aligned} Lu &:= - \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) D_j D_k u + u = b(1 + |Du|^2) \text{ in } \Omega \\ \tilde{B}u &:= \frac{\partial u}{\partial \beta} + u = a \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Darüber hinaus existiert eine nur von L, β, Ω, N und p abhängige wachsende Funktion $\gamma_0: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, so daß

$$(1.8) \quad \|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq \gamma_0(\|b\|_{L_\infty(\Omega)}, \|a\|_{L_\infty(\partial\Omega)})(1 + \|a\|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)})$$

gilt.

Wir wollen zunächst zeigen, wie aus dem Lemma der Beweis des Satzes (1.5) folgt:

$l \in \mathbb{N}$ sei vorläufig fest; $u \in W_p^2(\Omega)$ sei eine Lösung von (1.3) mit $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq 1$. Man setze

$$b := ((1 - a_0)u + f(\cdot, u, Du) - \sum_{j=1}^N a_j D_j u) / (1 + |Du|^2) \quad \text{in } \overline{\Omega}$$

und $a := (1 - b_0)u + g(\cdot, u)$ auf $\partial\Omega$,

so daß $b \in L_\infty(\Omega)$ mit

$$\|b\|_{0,\infty} \leq (1 + \|a_0\|_{C(\overline{\Omega})}) \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \tilde{c}(\|u\|_{C(\overline{\Omega})}) \leq c_1$$

(in $\tilde{c}$ gehen die Funktion c und die $C(\overline{\Omega})$ -Normen von a_j ein) und $a \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, also insbesondere $a \in L_\infty(\partial\Omega)$ folgt. Um a in der L_∞ -Norm abzuschätzen, schreibe man

$$\|a\|_{0,\infty,\partial\Omega} \leq \alpha_1 := \sup_{\substack{x \in \partial\Omega \\ |\xi| \leq 1}} |g(x, \xi)| + 1(\|b_0\|_{C(\partial\Omega)} + 1).$$

Nach Wahl von a und b löst u auch das Problem (1.7), so daß aus Lemma (1.3)

$$(1.9) \quad \|u\|_{2,p} \leq \gamma_0(c_1, \alpha_1)(1 + \|a\|_{1-1/p,p,\partial\Omega})$$

folgt. Anwendung von (1.4) garantiert jetzt mit den Eigenschaften des Spuoperators die Existenz eines $\theta_1 > 0$, in das u.a. auch die C^1 -Norm von b_0 eingeht, mit

$$\|u\|_{2,p} \leq \theta_1(1 + \|u\|_{1,p}).$$

Aufgrund einer Interpolationsungleichung für Sobolevräume [1, Thm. 4.14]

gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$, das nur von ϵ, Ω , N und p abhängt, mit

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,p} &\leq \theta_1 (1 + \epsilon \|u\|_{2,p} + \delta(\epsilon) \|u\|_{0,p}) \\ &\leq \theta_1 (1 + \delta(\epsilon) \lambda(\Omega)^{1/p}) + \theta_1 \epsilon \|u\|_{2,p} . \end{aligned}$$

Dabei bezeichne λ das N -dimensionale Lebesguemaß. Setzt man $\epsilon :=$

$$:= \epsilon_1 := (2\theta_1)^{-1}, \text{ so folgt mit } \theta_1 := 2\theta_1(1 + \delta(\epsilon_1)\lambda(\Omega)^{1/p})$$

$$\|u\|_{2,p} \leq \theta_1, \text{ falls } \|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq 1 .$$

O.E. sei die Folge (θ_1) monoton steigend. Nun konstruiert man die Funktion γ wie im Beweis des Lemmas (1.2). $\square$

Beweis von Lemma (1.3):

Für $\sigma, \tau \in [0,1]$ betrachten wir das modifizierte Problem

$$\begin{aligned} (1.10) \quad Lu &= \tau b(\sigma + |Du|^2) \quad \text{in } \Omega \\ \tilde{B}u &= \tau \sigma a \quad \text{auf } \partial\Omega . \end{aligned}$$

Mit $u_{\sigma\tau}$ bezeichnen wir eine W_p^2 -Lösung von (1.10), falls eine solche überhaupt existiert. Sei $\rho \in [0,1]$; zur Abkürzung setzen wir $v_1 := u_{\sigma\tau}$ und $v_2 := u_{\rho\tau}$, $w := v_1 - v_2$ und $M := |\sigma - \rho| (\|b\|_{0,\infty} + \|a\|_{0,\infty})$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} L(M \pm w) - \tau b \sum_{j=1}^N D_j(v_1 + v_2) D_j(M \pm w) &= \\ &= |\sigma - \rho| (\|b\|_{0,\infty} + \|a\|_{0,\infty}) \pm \tau(\sigma - \rho)b \geq 0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \tilde{B}(M \pm w) = M \pm \tau(\sigma - \rho)a \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega .$$

Aus dem Bony'schen Maximumprinzip [9] folgt daher

$$(1.11) \quad \|w\|_{C(\bar{\Omega})} \leq |\sigma-\rho| (\|b\|_{0,\infty} + \|a\|_{0,\infty}).$$

Eine erste Folgerung ist die Eindeutigkeit der Lösungen von

(1.10) (setze $\sigma=\rho$); außerdem folgt

$$(1.12) \quad \|u_{\sigma 1}\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|b\|_{0,\infty} + \|a\|_{0,\infty},$$

da $u_{01} = 0$.

Weiter ist $Lw = \tau(\sigma-\rho)b + \tau b(|Dv_1|^2 - |Dw - Dv_1|^2)$, also

$$\|Lw\|_{0,p} \leq \|b\|_{0,\infty} (\lambda(\Omega))^{1/p} + 3\| |Dv_1|^2 \|_{0,p} + 2\|b\|_{0,\infty} \| |Dw|^2 \|_{0,p}.$$

Die Gagliardo-Nirenberg-Interpolationsungleichung [15, Thm. 10.1] liefert nun eine Konstante $\gamma_1 > 0$ mit

$$\| |Dv|^2 \|_{0,p} \leq \gamma_1 \|v\|_{0,\infty} \|v\|_{2,p} \quad \text{für jedes } v \in W_p^2(\Omega).$$

Zusammen mit (1.11) und der L_p -Abschätzung für elliptische Gleichungen [2] erhalten wir ($\gamma_2 > 0$)

$$\begin{aligned} \|w\|_{2,p} &\leq \gamma_2 (\|Lw\|_{0,p} + \|\tilde{B}w\|_{1-1/p,p,\partial\Omega}) \\ &\leq 2\gamma_1\gamma_2 \|b\|_{0,\infty} (\|b\|_{0,\infty} + \|a\|_{0,\infty}) |\sigma-\rho| \|w\|_{2,p} + \\ &\quad + \gamma_2 \|b\|_{0,\infty} (\lambda(\Omega))^{1/p} + 3\gamma_1 \|v_1\|_{0,\infty} \|v_1\|_{2,p} + \\ &\quad + \gamma_2 \|a\|_{1-1/p,p,\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Wir wählen nun $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $2\gamma_1\gamma_2 \|b\|_{0,\infty} (\|b\|_{0,\infty} + \|a\|_{0,\infty}) < \frac{1}{\varepsilon} n$ gilt.

Dann haben wir für alle $\rho, \sigma, \tau \in [0,1]$

$$(1.13) \quad \|u_{\rho\tau}\|_{2,p} \leq \|u_{\sigma\tau}\|_{2,p} + 2\gamma_2 \|b\|_{0,\infty} (\lambda(\Omega))^{1/p} + 3\gamma_1 \|u_{\sigma\tau}\|_{C(\overline{\Omega})} \cdot \\ \cdot \|u_{\sigma\tau}\|_{2,p} + 2\gamma_2 \|a\|_{1-1/p,p,\partial\Omega},$$

sofern nur $|p-\sigma| \leq 1/n$ vorausgesetzt ist.

Nun setzen wir $\sigma_i := i/n$, $i = 0, \dots, n$, und - im Falle der Existenz - $u_{i\tau} := u_{\sigma_i\tau}$ und $u_i := u_{i1}$. Wir haben also zunächst die Existenz von u_n zu zeigen; denn das ist eine Lösung von (1.7). Daher formulieren wir die Behauptung:

Für $i = 0, \dots, n$ existieren die Lösungen $u_{i\tau} \in W_p^2(\Omega)$ der Aufgabe (1.10) mit $\tau \in [0,1]$ und $\sigma = \sigma_i$, und es gibt von $\tau \in [0,1]$ unabhängige Konstanten M_i mit $\|u_{i\tau}\|_{2,p} \leq M_i$.

Im Falle $i = 0$ ist die Behauptung wegen $u_0 = u_{0\tau} = 0$ sicher richtig. Beim Schluß von i auf $i+1$ beachte man, daß aus (1.13) für alle $\tau \in [0,1]$ folgt

$$(1.14) \quad \|u_{i+1,\tau}\|_{2,p} \leq M_{i+1} := M_i + 2\gamma_2 \|b\|_{0,\infty} (\lambda(\Omega))^{1/p} + 3\gamma_1 c M_i^2 + \\ + 2\gamma_2 \|a\|_{1-1/p,p,\partial\Omega},$$

wenn c eine Einbettungskonstante von $W_p^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ ist.

Für $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ sei $T(\varphi)$ die eindeutig bestimmte Lösung aus $W_p^2(\Omega)$ von

$$(1.15) \quad \begin{aligned} Lu &= b\left(\frac{i+1}{n} + |D\varphi|^2\right) \quad \text{in } \Omega \\ \beta u &= \frac{i+1}{n} a \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

T bildet dann beschränkte Mengen von $C^1(\overline{\Omega})$ auf relativkompakte in $C^1(\overline{\Omega})$ ab (man verwende wie üblich die L_p -Abschätzung [2]), hat einen abgeschlossenen Graphen und ist daher vollstetig. Die Lösungen von $u = \tau T(u)$ werden durch (1.14) beschränkt, so daß aus dem Leray-Schauder'schen Fixpunktsatz (e.g. [16, Thm. 10.3] die Existenz von u_{i+1} folgt. Die oben formulierte Zwischenbehauptung ist nun zunächst für $\tau = 1$, dann aber natürlich auch für jedes $\tau \in [0,1]$ bewiesen.

Also gibt es die eindeutige Lösung von (1.7). Um die a-priori-Abschätzung (1.8) zu zeigen, wenden wir (1.12) an. Also ist $\|u_i\|_{C(\overline{\Omega})} \leq K := \|b\|_{0,\infty} + \|a\|_{0,\infty}$, $i = 0, \dots, n$; dies in (1.13) eingesetzt ergibt ($\rho = \sigma_{i+1}$, $\sigma = \sigma_i$):

$$\|u_{i+1}\|_{2,p} \leq \|u_i\|_{2,p} + 2\gamma_2 \|b\|_{0,\infty} (\lambda(\Omega))^{1/p} + 3\gamma_1 K \|u_i\|_{2,p} + 2\gamma_2 \|a\|_{1-1/p,p,\partial\Omega}.$$

Da $u_0 = 0$ und $u = u_n$, folgt durch Induktion die Behauptung des Lemmas. $\square$

2. Die Lösung der Hilfsgleichung

In diesem Abschnitt soll mit Hilfe der a-priori-Abschätzung des ersten Paragraphen ein kompakter, wachsender Operator auf einer geeigneten Teilmenge von $C^1(\overline{\Omega})$ konstruiert werden, dessen Fixpunkte Lösungen von

$$(2.1) \quad \begin{aligned} Au &= f(x, u, Du) && \text{in } \Omega \\ Bu &= g(x, u) && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

sind.

$\bar{v}$ sei eine Unterlösung und $\hat{v}$ eine Oberlösung von (2.1) mit $\bar{v} \leq \hat{v}$. Falls g lokal lipschitzstetig ist, sei $\omega \geq 0$ so bestimmt, daß $(a_0 + \omega, b_0 + \omega) > 0$ im Produkt der Ordnungsbanachräume $C(\overline{\Omega})$ und $C(\partial\Omega)$ gilt (vgl. [4] zur Theorie der geordneten Banachräume) und daß für $x \in \partial\Omega$ $g(x, \cdot) \mid I$ strikt monoton wächst mit $I := [\min_{\overline{\Omega}} \bar{v}, \max_{\overline{\Omega}} \hat{v}]$.

Die Aufgabe (2.1) ist dann äquivalent zu

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (A + \omega)u &= f_{\omega}(x, u, Du) := f(x, u, Du) + \omega u && \text{in } \Omega \\ (B + \omega)u &= g_{\omega}(x, u) := g(x, u) + \omega u && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

und $(A + \omega, B + \omega)$ ist positiv invers, das lineare Problem ist eindeutig lösbar, und $\bar{v}$ und $\hat{v}$ sind wieder Unter- bzw. Oberlösung von (2.2).

Der folgende Satz bereitet die Definition des Fixpunktoperators vor, der oben erwähnt wird.

(2.1) Satz

$f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und stetig differenzierbar bzgl. $(\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$; ferner habe f höchstens quadratisches Wachstum bzgl. η (vgl. (1.5)).

$g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei lokal lipschitzstetig.

$\bar{v}$ sei eine Unterlösung, $\bar{v}$ eine Oberlösung von (2.1) mit

$\bar{v} \leq \bar{v}$; $\omega \geq 0$ sei wie oben bestimmt.

Dann gibt es eine Funktion $h \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ und ein $\lambda > 0$, so daß das Problem

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u + \lambda((A + \omega)u - f(x, u, h(Du))) &= d && \text{in } \Omega \\ (B + \omega)u &= g_\omega(x, \varphi) && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für jedes Paar $(d, \varphi) \in [\bar{v}, \bar{v}]_{L_p(\Omega)} \times [\bar{v}, \bar{v}]_{W_p^1(\Omega)}$ genau eine Lösung $u =: T(d, \varphi) \in [\bar{v}, \bar{v}]_{W_p^2(\Omega)}$ hat.

Bezeichnung:

Wenn X ein Vektorraum bestehend aus auf Ω definierten Funktionen ist, so sei $[\bar{v}, \bar{v}]_X := [\bar{v}, \bar{v}] \cap X$.

Beweis von Satz (2.1):

Durch Umbenennen kann man erreichen, daß o.E. $\omega = 0$ gilt.

Zunächst sollen h und λ festgelegt werden. Dazu seien

$$\mathcal{H} := \{h \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \mid |h(\eta)| \leq 2|\eta| \text{ für } \eta \in \mathbb{R}^N\}$$

und

$$(2.4) \quad m \geq \max \{ \|\bar{v}\|_E, \|\bar{v}\|_E \mid E = C^1(\bar{\Omega}) \text{ oder } E = W_p^2(\Omega) \} + 1.$$

Dann existiert eine Konstante $M \geq m$, so daß für jedes $h \in \mathcal{H}$

und jede Lösung $u \in [\bar{v}, \bar{v}]_{W_p^2(\Omega)}$ von

$$(2.5) \quad \begin{aligned} Au &= f(x, u, h(Du)) && \text{in } \Omega \\ Bu &= g(x, u) && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

die Ungleichungen

$$(2.6) \quad \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} < M \quad \text{und} \quad \|u\|_{2,p} < M$$

gelten. Das ist klar wegen Satz (1.2), wobei die dort auftretende a-priori-Schrankenfunktion γ nicht von dem speziellen $h \in \mathcal{H}$, sondern nur von der Wachstumsgeschwindigkeit von f in ξ abhängt.

Nun wähle man $h \in \mathcal{H}$ so, daß gilt:

$$(2.7) \quad h(\eta) = \eta \text{ für } |\eta| < M, \text{ und } h(\mathbb{R}^N) \text{ ist beschränkt.}$$

Sei $k(x, \xi, \eta) := f(x, \xi, h(\eta))$ für $(x, \xi, \eta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ und
 $F(u)(x) := k(x, u(x), Du(x))$ für $x \in \bar{\Omega}$ und $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Nun werde $\lambda > 0$ so gewählt, daß

$$(2.8) \quad 1 - \lambda k_{\xi}(x, \xi, \eta) > 0 \text{ für } x \in \bar{\Omega}, |\xi| \leq m, \eta \in \mathbb{R}^N$$

gilt. Dies ist wegen der Beschränktheit von $h(\mathbb{R}^N)$ natürlich möglich.

Durch (2.7) und (2.8) sind h und λ festgelegt, so daß wir nun (2.3) untersuchen können.

Es sei $(d, \varphi) \in [\bar{v}, \bar{v}]_{L_p(\Omega)} \times [\bar{v}, \bar{v}]_{W_p^1(\Omega)}$. Zunächst ist dann (vgl. Lemma (1.1)) $G(\varphi) \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, wobei G den Nemytskii-Operator von g bezeichne.

Zur Eindeutigkeit: Sind $u_i \in [\bar{v}, \bar{v}]_{W_p^2(\Omega)}$, $i = 1, 2$, zwei Lösungen von (2.3), folgt $\|u_i\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \max \{\|\bar{v}\|_{C(\bar{\Omega})}, \|\bar{v}\|_{C(\bar{\Omega})}\} \leq m$.

[7, Lemma 2] impliziert dann sofort $u_1 = u_2$. (Dieses Lemma ist natürlich auch im Falle unseres allgemeineren A anwendbar.)

Zur Existenz: Mit $R(\varphi)$ bezeichnen wir die eindeutig bestimmte Lösung von

$$(2.9) \quad \begin{aligned} Au &= 0 && \text{in } \Omega \\ Bu &= G(\varphi) && \text{auf } \partial\Omega; \end{aligned}$$

es ist $R(\varphi) \in W_p^2(\Omega)$.

Sei $\tilde{\psi} := \tilde{v} + \lambda(A\tilde{v} - F(\tilde{v})) - d$. Da $\tilde{v}$ eine Oberlösung mit

$$\|\tilde{v}\|_{C(\overline{\Omega})} \leq m \text{ ist, gilt } \tilde{\psi} \geq 0.$$

Bekanntlich gibt es für jedes $q \in L_p(\Omega)$ eine eindeutig bestimmte Lösung Kq der Aufgabe

$$(2.10) \quad \begin{aligned} Au &= q && \text{in } \Omega \\ Bu &= 0 && \text{auf } \partial\Omega ; \end{aligned}$$

es ist (e.g. [2]) $K \in \mathcal{L}(L_p(\Omega), W_p^2(\Omega))$.

Sei $\tilde{w} := \tilde{v} - R(\varphi) - KA\tilde{v}$. Dann gilt $\tilde{w} \in W_p^2(\Omega)$, $A\tilde{w} = 0$ und

$B\tilde{w} = B\tilde{v} - G(\varphi)$. Nun definiere man eine Abbildung $H: C^1(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R} \rightarrow C^1(\overline{\Omega})$ durch

$$(2.11) \quad H(u, \tau) := \lambda(u - R(\varphi) - \tau\tilde{w}) + K(u - \lambda F(u)) - d - \tau\tilde{\psi}$$

für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\tau \in \mathbb{R}$. Falls $u \in W_p^2(\Omega)$ ist und $B(u - \tau\tilde{w}) = G(\varphi)$ auf $\partial\Omega$ gilt, folgt nach Anwenden von A und B auf $H(u, \tau)$

$$(2.12) \quad \begin{aligned} AH(u, \tau) &= u + \lambda(Au - F(u)) - d - \tau\tilde{\psi} && \text{in } \Omega \\ BH(u, \tau) &= \lambda(B(u - \tau\tilde{w}) - G(\varphi)) = 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$(2.13) \quad H(u, \tau) = K(u + \lambda(Au - F(u)) - d - \tau\tilde{\psi}),$$

falls $u \in W_p^2(\Omega)$ und $B(u - \tau\tilde{w}) = G(\varphi)$ gelten.

Falls $H(u, \tau) = 0$, $(u, \tau) \in C^1(\bar{\Omega}) \times \mathbb{R}$, sind die (2.13) implizierenden Voraussetzungen sicher erfüllt.

Da $B(\bar{v} - \bar{w}) = G(\varphi)$, folgt mit (2.13) $H(\bar{v}, 1) =$

$= K(\bar{v} + \lambda(A\bar{v} - F(\bar{v})) - d - \bar{\psi}) = 0$. Falls es gelingt, diese Lösung,

nämlich $(\bar{v}, 1)$, von $H(u, \tau) = 0$ bis $\tau = 0$ fortzusetzen, ist der Satz

bewiesen; denn wieder mit (2.13) folgt dann $0 = H(u, 0) = K(u + \lambda(Au - F(u)) - d)$,

also $u + \lambda(Au - F(u)) = d$ in Ω , und B auf (2.11) angewandt liefert

$0 = Bu - G(\varphi)$ auf $\partial\Omega$.

Diese Fortsetzung soll mit Hilfe des impliziten Funktionentheorems durchgeführt werden.

F ist für jedes $u \in C^1(\bar{\Omega})$ differenzierbar, und man hat

$$F'(u)h = \sum_{j=1}^N k_{\eta_j}(x, u, Du) D_j h + k_{\xi}(x, u, Du)h$$

für $h \in C^1(\bar{\Omega})$. Daher ist auch H stetig differenzierbar, und für

$(u, \tau) \in C^1(\bar{\Omega}) \times \mathbb{R}$ gilt

$$(2.14) \quad D_1 H(u, \tau) = \lambda I_{C^1(\bar{\Omega})} + K \circ (I_{C^1(\bar{\Omega})} - \lambda F'(u)).$$

Da K als Operator mit Wertebereich $C^1(\bar{\Omega})$ kompakt ist, gehört

$D_1 H(u, \tau)$ zur Klasse der Fredholmoperatoren mit Index 0 auf $C^1(\bar{\Omega})$.

Falls außerdem $\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq m$ vorausgesetzt wird, so ist $D_1 H(u, \tau)$

injektiv, also sogar ein Automorphismus von $C^1(\bar{\Omega})$. In der Tat,

falls $D_1 H(u, \tau)h = 0$, $h \in C^1(\bar{\Omega})$, also $\lambda h + K(h - \lambda F'(u)h) = 0$ gilt, folgt nach Anwenden von A und B

$$\begin{aligned} Ah - \sum_{j=1}^N k_{n_j}(x, u, Du) D_j h + \frac{1}{\lambda} (1 - \lambda k_{\xi}(x, u, Du)) h &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ Bh &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wegen $\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq m$ und (2.8) impliziert Bony's Maximumprinzip [9] oder [7, Lemma 1] $h = 0$, und damit die Injektivität von $D_1 H(u, \tau)$.

Da $\|\bar{v}\|_{C(\bar{\Omega})} < m$, gibt es aufgrund des impliziten Funktionentheorems eine Umgebung $V \times W$ von $(\bar{v}, 1)$ in $C^1(\bar{\Omega}) \times \mathbb{R}$, so daß $H(u, \tau) = 0$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u(\tau) \in V$ hat. Durch Verkleinern von W , falls nötig, können wir annehmen, daß $\|u(\tau)\|_{C(\bar{\Omega})} < m$ für $\tau \in W$.

Wir zeigen nun, daß $u(\tau) \in [\bar{v}, \bar{v}]$ für $\tau \in W \cap [0, 1]$ gilt.

Da $H(u(\tau), \tau) = 0$, ist zunächst $u(\tau) \in W_p^2(\Omega)$, und es gilt mit (2.12)

$$\begin{aligned} (2.15) \quad u(\tau) + \lambda(Au(\tau) - F(u(\tau))) &= d + \tau\bar{\psi} \quad \text{in } \Omega \\ Bu(\tau) &= G(\varphi) + \tau B\bar{w} \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Weiter ist $B\bar{w} = B\bar{v} - G(\varphi) \geq B\bar{v} - G(\bar{v}) \geq 0$, da $\varphi \in [\bar{v}, \bar{v}]$ und da g nach Wahl von ω (s.o.) monoton in der zweiten Variablen wächst; außerdem ist $\bar{v}$ eine Oberlösung. Daher gilt $Bu(\tau) \leq G(\varphi) + B\bar{w} = B\bar{v}$ und wegen $\bar{\psi} \geq 0$ $d + \tau\bar{\psi} \leq d + \bar{\psi} = \bar{v} + \lambda(A\bar{v} - F(\bar{v}))$ für $\tau \in W \cap [0, 1]$. Schreiben wir dies noch einmal zusammenfassend auf, sehen wir, daß

$$(2.16) \quad \|u(\tau)\|_{C(\bar{\Omega})} < m$$

und

$$(2.17) \quad \begin{aligned} u(\tau) + \lambda(Au(\tau) - F(u(\tau))) &\leq \bar{v} + \lambda(A\bar{v} - F(\bar{v})) \text{ in } \Omega \\ Bu(\tau) &\leq B\bar{v} \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für $\tau \in W \cap [0,1]$ gilt. [7, Lemma 2] impliziert nun $u(\tau) \leq \bar{v}$; analog folgt $u(\tau) \geq \bar{v}$ (z.B. ist $Bu(\tau) = G(\varphi) + \tau(B\bar{v} - G(\varphi)) \geq G(\varphi) + \tau(B\bar{v} - G(\varphi)) \geq B\bar{v}$), womit die Zwischenbehauptung bewiesen wäre.

Wenn es nun gelingt zu zeigen, daß $\mathcal{K} := \{u(\tau) \mid \tau \in W \cap [0,1]\}$ in $W_p^2(\Omega)$ beschränkt, also in $C^1(\bar{\Omega})$ relativkompakt ist, liefert ein bekanntes Kontinuitätsargument, daß die Lösungskurve $\tau \mapsto u(\tau)$ über W hinaus fortgesetzt werden kann, und zwar so oft, bis $\tau = 0$ erreicht ist.

Sei also $\tau \in W \cap [0,1]$. Dann ist $\|F(u(\tau))\|_{0,p}^p = \int_{\Omega} |f(x, u(\tau)(x), h(u(\tau)(x)))|^p dx$ gleichmäßig in τ beschränkt wegen (2.16) und (2.7). Es folgt mit (2.11)

$$(2.18) \quad \|u(\tau)\|_{2,p} \leq \|R(\varphi) + \tau \bar{w}\|_{2,p} + \frac{c}{\lambda} (\|u(\tau)\|_{0,p} + \lambda \|F(u(\tau))\|_{0,p} + \|d + \tau \bar{v}\|_{0,p}) ;$$

c rührt dabei von der L_p -Abschätzung von Agmon-Douglis-Nirenberg [2] her.

Daher ist $\mathcal{K}$ tatsächlich in $W_p^2(\Omega)$ beschränkt, so daß $u(0) \in [\bar{v}, \bar{v}]_{W_p^2(\Omega)}$ existiert. $T(d, \varphi) := u(0)$ löst (2.3). $\square$

Bemerkung:

Der obige Beweis ist keine allzu schwierige Modifikation des Beweises von [7, Lemma 3]. Im letzteren Lemma werden jedoch nur homogene Randbedingungen betrachtet.

Mittels Satz (2.1) läßt sich nun zeigen (vgl. Satz (2.6)), daß

$u \in [\bar{v}, \bar{v}]_{W_p^2(\Omega)}$ genau dann das Problem (2.1) löst, wenn
 $u \in [\bar{v}, \bar{v}]_{C^1(\bar{\Omega})}$ ist mit $u = T(u, u)$. Daher sei

$$(2.19) \quad S(u) := T(u, u) \text{ für } u \in [\bar{v}, \bar{v}]_{C^1(\bar{\Omega})}.$$

Wir interessieren uns also für die Fixpunkte von S . Um die abstrakten Existenz- und Multiplizitätsresultate in [4] anwenden zu können, brauchen wir u.a. die Kompaktheit von S . Dies ist nicht so ohne weiteres zu beweisen, da (2.18) den Summanden $R(\varphi)$ in der W_p^2 -Norm enthält, der sich nicht gleichmäßig für $\varphi \in [\bar{v}, \bar{v}]_{C^1(\bar{\Omega})}$ abschätzen läßt. Wir werden die Sätze in [4] daher ein wenig modifizieren müssen.

Zunächst jedoch ein einfaches

(2.2) Lemma

Unter den Voraussetzungen des Satzes (2.1) ist der Operator

$$S: [\bar{v}, \bar{v}]_{C^1(\bar{\Omega})} \rightarrow [\bar{v}, \bar{v}]_{C^1(\bar{\Omega})}$$

stark wachsend und hat einen abgeschlossenen Graphen.

Beweis:

Wie oben sei o.E. $\omega = 0$; ebenso werden auch die früheren Bezeichnungen verwendet. Seien $u_i \in [\bar{v}, \bar{v}]_{C^1(\bar{\Omega})}$, $i = 1, 2$, mit $u_1 < u_2$ und
 $v_i := S(u_i) = T(u_i, u_i) \in W_p^2(\Omega)$. Damit gilt

$$v_1 + \lambda (Av_1 - F(v_1)) = u_1 < u_2 = v_2 + \lambda (Av_2 - F(v_2)) \text{ in } \Omega$$

$$Bv_1 = G(u_1) < G(u_2) = Bv_2 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Wegen $\|v_i\|_{C(\overline{\Omega})} \leq m$ folgt mit [7, Lemma 2] zunächst $v_1(x) < v_2(x)$ für $x \in \Omega$, dann aber auch für alle $x \in \overline{\Omega}$, denn die Annahme $v_1(x) = v_2(x)$ für ein $x \in \partial\Omega$ führt mit demselben Lemma über $\partial v_2 / \partial \varepsilon(x) < \partial v_1 / \partial \varepsilon(x)$ wie üblich zu $Bv_2(x) < Bv_1(x)$, also zum Widerspruch.

Daß S einen abgeschlossenen Graphen hat, folgt mit Standardargumenten aus der Eindeutigkeit der Lösung von (2.3) und der Regularitätstheorie elliptischer Differentialgleichungen. $\square$

Nun soll der Definitionsbereich von S geeignet eingeschränkt werden, um Kompaktheit zu erzwingen.

(2.3) Lemma

Es existiert ein $\theta > 0$ derart, daß $S(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ mit

$$(2.20) \quad \mathcal{D} := [\overline{v}, \overline{v}] \cap \theta \overline{B}_{W_p^2(\Omega)}.$$

Beweis:

Aus (2.18) folgt zunächst mit $\tau = 0$, $d = \varphi = u \in [\overline{v}, \overline{v}]_{C^1(\overline{\Omega})}$

$$\|S(u)\|_{2,p} \leq \|R(u)\|_{2,p} + \frac{C}{\lambda} (\|S(u)\|_{0,p} + \lambda \|F(S(u))\|_{0,p} + \|u\|_{0,p}).$$

Da u ebenso wie $S(u)$ zwischen $\overline{v}$ und $\overline{v}$ liegt, ist die letzte Klammer durch eine Konstante beschränkt. Erinnt man sich an die Definition von R (vgl. (2.9)), so folgt mittels L_p -Abschätzung [2] die Existenz einer von u unabhängigen Konstanten $\gamma > 0$ mit

$$\|S(u)\|_{2,p} \leq \gamma(1 + \|G(u)\|_{1-1/p,p,\partial\Omega}) \leq \gamma(1 + \|u\|_{1,p})$$

für alle $u \in [\bar{v}, \hat{v}]_{W_p^1(\Omega)}$, wobei noch Lemma (1.1) Verwendung fand.

$M \geq m$ sei wie im Beweis von Satz (2.1) gewählt (vgl. (2.4) und (2.6)).

Sei jetzt $u \in \mathcal{D}$ mit einem noch freien $\theta \geq M$. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $c(\epsilon) > 0$, das nur von ϵ, N, p, Ω abhängt ([1, Thm. 4.14]), so daß wir durch

$$\begin{aligned} \|S(u)\|_{2,p} &\leq \gamma(1 + \epsilon \|u\|_{2,p} + c(\epsilon) \|u\|_{0,p}) \\ &\leq \gamma(1 + c(\epsilon) \lambda(\Omega)^{1/p} m) + \gamma\theta\epsilon \end{aligned}$$

weiter abschätzen können. Wähle jetzt $\epsilon := 1/2\gamma$ und

$$(2.21) \quad \theta := \max \{M, 2\gamma (1 + c(\epsilon) m\lambda(\Omega)^{1/p})\},$$

so daß für alle $u \in \mathcal{D}$ $\|S(u)\|_{2,p} \leq \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\theta = \theta$ gilt. Daher ist $S(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. $\square$

(2.4) Bemerkung

Durch die Wahl von θ in (2.21) ist gewährleistet, daß alle Fixpunkte von S in $[\bar{v}, \hat{v}]_{C^1(\bar{\Omega})}$ bereits in $\mathcal{D}$ liegen; ferner sind wegen (2.4) auch $\bar{v}, \hat{v} \in \mathcal{D}$. In der Tat ist jeder Fixpunkt $u \in [\bar{v}, \hat{v}]_{C^1(\bar{\Omega})}$ von S eine Lösung von (2.3) mit $u = d = \varphi$, also löst u auch (2.5). Daher ist $\|u\|_{2,p} < M \leq \theta$ gemäß (2.6).

(2.5) Lemma

S bildet $\bar{\mathcal{D}}$ in $\bar{\mathcal{D}}$ ab, und $S: \bar{\mathcal{D}} \rightarrow \bar{\mathcal{D}}$ ist kompakt. Der Abschluß ist dabei bzgl. der C^1 -Topologie zu verstehen.

Beweis:

Da $S(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$, ist $S(\mathcal{D})$ beschränkt in $W_p^2(\Omega)$, daher relativkompakt in $C^1(\overline{\Omega})$ und auch in $\mathcal{D}$. Sei nun $u \in \mathcal{D}$. Es gibt eine Folge $(u_j) \subset \mathcal{D}$, die in $C^1(\overline{\Omega})$ gegen u konvergiert. Durch Übergang zu einer Teilfolge, falls nötig, konvergiert auch $(S(u_j))$ in $C^1(\overline{\Omega})$ gegen ein gewisses $v \in \overline{\mathcal{D}}$. Da S graphenabgeschlossen ist (Lemma (2.2)), hat man $S(u) = v \in \overline{\mathcal{D}}$.

Also hat $S: \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$ relativkompaktes Bild und einen abgeschlossenen Graphen. Damit ist S stetig. $\square$

Wir fassen die wichtigen Eigenschaften von S im folgenden noch einmal zusammen:

(2.6) Satz

- (i) $S: \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$ ist kompakt.
- (ii) $u \in [\overline{v}, \overline{v}]_{W_p^2(\Omega)}$ ist genau dann eine Lösung von (2.1), wenn u ein Fixpunkt von S in $\mathcal{D}$ ist; alle Fixpunkte von S in $[\overline{v}, \overline{v}]_{C^1(\overline{\Omega})}$ liegen bereits in $\mathcal{D}$.
- (iii) $S: [\overline{v}, \overline{v}]_{C^1(\overline{\Omega})} \rightarrow [\overline{v}, \overline{v}]_{C^1(\overline{\Omega})}$ ist stark wachsend.
- (iv) Sofern $w \in [\overline{v}, \overline{v}]_{W_p^2(\Omega)}$ eine Unterlösung (resp. strikte Unterlösung von (2.1)) ist, gilt $w \leq S(w)$ (resp. $w < S(w)$). Für Oberlösungen ist eine analoge Aussage richtig.

Beweis:

(i) ist die Aussage von Lemma (2.5).

Falls $u \in [\overline{v}, \overline{v}]_{W_p^2(\Omega)}$ eine Lösung von (2.1) ist, folgt wegen (2.6) zunächst $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} < M$. Nach Wahl von h in (2.7) gilt daher $h(u(x)) = u(x)$ für $x \in \overline{\Omega}$, so daß u auch (2.3) mit $d = \varphi = u$ löst. Daher ist $u = S(u)$,

und somit $u \in \mathcal{D}$. Umgekehrt liegt jeder Fixpunkt u von S in $W_p^2(\Omega)$ und löst (2.5), so daß man wieder mittels (2.6) und (2.7) u als Lösung von (2.1) erkennt.

Da (iii) aus Lemma (2.2) folgt, brauchen wir uns nur noch mit (iv) zu beschäftigen: Ist w eine Unterlösung von (2.1), so ersetze man im Beweis von Satz (2.1) $[\bar{v}, \bar{v}]$ durch $[w, \bar{v}]$. Ebenso wie dort folgt, daß (2.3) mit $d := \varphi := w$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\tilde{S}(w) \in [w, \bar{v}]$ hat, die wegen der Eindeutigkeit mit $S(w)$ übereinstimmt. Daher ist $w \leq S(w)$. Ist die Unterlösung strikt, so gilt wegen (ii) sicher nicht $w = S(w)$. Daher bleibt nur $w < S(w)$. $\square$

3. Einige Existenz- und Multiplizitätsresultate für elliptische Differentialgleichungen unter nichtlinearen Randbedingungen

Wir wollen in diesem Paragraphen Aussagen über die Existenz und Anzahl von Lösungen der Gleichung

$$(3.1) \quad \begin{aligned} Au &= f(x, u, Du) \quad \text{in } \Omega \\ Bu &= g(x, u) \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

machen, die denen in [7] für den Fall homogener Randbedingungen entsprechen.

In diesem ganzen Abschnitt seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \text{ sei stetig und stetig differenzierbar bzgl. } (\xi, \eta), \text{ ferner habe } f \text{ höchstens quadratisches Wachstum bzgl. } \eta. \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sei lokal lipschitzstetig.}$$

Wir formulieren nun die Hauptresultate des ersten Teils dieser Arbeit.

(3.1) Theorem

f und g mögen die Voraussetzungen (3.2) und (3.3) erfüllen.

Falls $\bar{v}$ eine Unterlösung und $\bar{v}$ eine Oberlösung von (3.1) ist, so existiert eine kleinste Lösung $\underline{u}$ und eine größte Lösung $\bar{u}$ im Ordnungsintervall $[\bar{v}, \bar{v}]$.

Bemerkung:

Das Theorem (3.1) ist die konsequente Fortsetzung ähnlicher Resultate in [3] und [6], wo eine milde nichtlineare Gleichung unter nichtlinearen Randbedingungen behandelt wird, und in [5] und [7], wo es um semilineare Gleichungen unter linearen oder sogar homogenen Randbedingungen geht. Die Beweismethode dieser Arbeiten und auch des obigen Theorems besteht immer

darin, abstrakte Ergebnisse über kompakte, wachsende Operatoren in geordneten Banachräumen anzuwenden; sie unterscheidet sich wesentlich von dem z.B. in [29] verwendeten Verfahren, wo man über ein Fixpunktargument vom Leray-Schauder-Typ ebenfalls Aufgaben der Art (3.1) behandeln kann. Der Vorteil der Methode der geordneten Banachräume liegt vor allem in der Möglichkeit, auch Aussagen über untere Schranken der Anzahl von Lösungen zu machen, wie es in den beiden folgenden Theoremen geschehen soll (vgl. auch [5-7]). Anschließend folgen dann die Beweise.

Zuvor sei aber noch darauf hingewiesen, daß die Wachstumsbedingung in (3.2) wirklich wesentlich ist. Schmitt [29, p. 269] zitiert ein Beispiel einer gewöhnlichen elliptischen Differentialgleichung mit linearen Randbedingungen, die bei superquadratischem Wachstum im Gradienten keine Lösung hat.

(3.2) Theorem

f und g mögen die Voraussetzungen (3.2) und (3.3) erfüllen. $\bar{v}_j$ seien Unterlösungen und $\hat{v}_j$ Oberlösungen von (3.1) für $j = 1, 2$ mit $\bar{v}_1 < \hat{v}_1 < \bar{v}_2 < \hat{v}_2$. $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$ seien strikt. Dann hat (3.1) mindestens drei verschiedene Lösungen u_j mit $\bar{v}_1 \leq u_1 < u_3 < u_2 \leq \hat{v}_2$, so daß $u_j \in [\bar{v}_j, \hat{v}_j]$, $j = 1, 2$, gilt.

(3.3) Theorem

f und g mögen die Voraussetzungen (3.2) und (3.3) erfüllen. Ferner gelte

$$(3.4) \quad g \in C^2(\partial\Omega \times \mathbb{R}) .$$

$\bar{v}$ sei eine strikte Unterlösung, $\hat{v}$ eine strikte Oberlösung von (3.1) mit $\bar{v} < \hat{v}$.

Wenn die kleinste Lösung $u_1 = \bar{u}$ und die größte Lösung $u_2 = \hat{u}$ von (3.1) im Intervall $[\bar{v}, \hat{v}]$ verschieden sind (die Existenz folgt ja aus Thm. (3.1))

und wenn die Randwertaufgabe

$$(3.5) \quad \begin{aligned} Ah &= \sum_{j=1}^N f_{\eta_j}(x, u_i, Du_i) D_j h + f_{\xi}(x, u_i, Du_i) h \quad \text{in } \Omega \\ Bh &= g_{\xi}(x, u_i) h \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

keine positive Lösung für $i = 1$ oder $i = 2$ hat, so besitzt (3.1) mindestens drei verschiedene Lösungen in $[\bar{v}, \hat{v}]$.

In den Arbeiten [5-7] beruft sich der Autor auf Fixpunktsätze aus der Theorie geordneter Banachräume, wie sie in [4] gesammelt sind. Diese abstrakten Sätze sind häufig für einen auf einem Ordnungsintervall definierten Operator formuliert, so daß sie für unseren die Lösungen vermittelnden Operator S wegen seines eingeschränkten Definitionsbereiches (vgl. (2.20)) nicht unmittelbar anwendbar sind. Wir modifizieren daher zunächst die für uns wichtigen Ergebnisse aus [4].

(3.4) Lemma (vgl. [4, Cor. 6.2])

(E,P) sei ein Ordnungsbanachraum; $[\bar{y}, \hat{y}]$ sei ein nichtleeres Ordnungsintervall in E . $f : [\bar{y}, \hat{y}] \rightarrow E$ sei eine wachsende Abbildung, und $D \subset [\bar{y}, \hat{y}]$ habe die folgenden Eigenschaften:

- (i) $f|_D : D \rightarrow D$ sei kompakt;
- (ii) jeder Fixpunkt $x \in [\bar{y}, \hat{y}]$ von f liege bereits in D ;
- (iii) $\bar{y}, \hat{y} \in D$.

Dann hat f in $[\bar{y}, \hat{y}]$ einen minimalen Fixpunkt $\bar{x}$, der Grenzwert der wachsenden Folge $(f^k(y))_{k \in \mathbb{N}}$ ist, und einen maximalen Fixpunkt $\hat{x}$, der Limes der fallenden Folge $(f^k(\hat{y}))_{k \in \mathbb{N}}$ ist.

Beweis:

Zunächst werden wegen (i) und (iii) $\bar{y}, \hat{y}$ wieder in D abgebildet, so daß $\bar{y} \leq f(\bar{y}) \leq f(\hat{y}) \leq \hat{y}$ gilt. Wegen der Monotonie von f ist natürlich

$f([\bar{y}, \hat{y}]) \subset [\bar{y}, \hat{y}]$. Sei $x_0 := \bar{y}$, $x_{k+1} := f(x_k)$ für $k \in \mathbb{N}$. Man erkennt sofort, daß (x_k) wächst und wegen (i) einen Häufungspunkt $\bar{x}$ in D hat, der wegen der Wachstumseigenschaften der Folge sogar eindeutig ist, d.h. (x_k) konvergiert gegen $\bar{x}$. Da f auf D stetig ist, folgt $\bar{x} = f(\bar{x})$.

Ist $x \in [\bar{y}, \hat{y}]$ ein weiterer Fixpunkt von f , also insbesondere $x \in D$ wegen (ii), so ersetze man oben $\hat{y}$ durch x und D durch $D \cap [\bar{y}, x]$. Die Bedingungen (i) bis (iii) sind dann ebenfalls erfüllt, und da $\bar{x}$ genauso wie früher ausgerechnet wird, folgt $\bar{x} \in D \cap [\bar{y}, x]$, also $\bar{x} \leq x$. $\bar{x}$ ist somit minimaler Fixpunkt in $[\bar{y}, \hat{y}]$.

Analog argumentiert man für $\bar{x}$. □

Um Multiplizitätsaussagen zu erhalten, beweisen wir eine leichte Verallgemeinerung von [4, Thm. 14.2].

(3.5) Lemma

(E, P) sei ein Ordnungsbanachraum, dessen Kegel P nichtleeres Inneres habe. Es seien ferner Elemente $\bar{y}_1 < \hat{y}_1 < \bar{y}_2 < \hat{y}_2$ in E gegeben. $f : [\bar{y}_1, \hat{y}_2] \rightarrow E$ sei eine stark wachsende Abbildung, und $D \subset [\bar{y}_1, \hat{y}_2]$ habe die folgenden Eigenschaften:

- (i) D sei abgeschlossen und konvex;
- (ii) $\bar{y}_j, \hat{y}_j \in D$ für $j = 1, 2$;
- (iii) $f|_D : D \rightarrow D$ sei kompakt;
- (iv) jeder Fixpunkt von f in $[\bar{y}_1, \hat{y}_2]$ liege bereits in D .

Schließlich gelte noch $f(\hat{y}_1) < \hat{y}_1$ und $\bar{y}_2 < f(\bar{y}_2)$.

Dann hat f mindestens drei verschiedene Fixpunkte x, x_1, x_2 in $[\bar{y}_1, \hat{y}_2]$ (und damit in D) mit $\bar{y}_1 \leq x_1 < x < x_2 \leq \hat{y}_2$ und $x_j \in [\bar{y}_j, \hat{y}_j]$, $j = 1, 2$.

Beweis:

Zunächst bemerkt man, daß wegen (ii) und $f(D) \subset D$ das Ordnungsintervall $[\bar{y}_1, \bar{y}_2]$ in sich abgebildet wird.

Sei $X := D$ und $X_k := [\bar{y}_k, \bar{y}_k] \cap D$, $k = 1, 2$. X , X_k sind abgeschlossen und konvex, also Retrakte von E wegen des Erweiterungssatzes von Dugundji [13]. Da $X_k \subset X$, sind die X_k sogar Retrakte von X mit $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Wie üblich rechnet man leicht nach, daß $f(X_k) \subset X_k$. Außerdem ist f eingeschränkt auf X (resp. X_k) eine kompakte Abbildung mit Werten in X (resp. X_k).

Nun impliziert Lemma (3.4) die Existenz eines maximalen Fixpunktes $\bar{x}_1$ von f in $[\bar{y}_1, \bar{y}_1]$. Wegen $f(\bar{y}_1) < \bar{y}_1$ ist $\bar{x}_1 \neq \bar{y}_1$, also folgt $\bar{x}_1 \ll \bar{y}_1$, da f stark wächst. Insbesondere ist $U_1 := \text{int}_X X_1$ nichtleer.

In $X_1 \setminus U_1 = \partial_X X_1$ liegen keine Fixpunkte von f ; denn jeder Fixpunkt y von f in X_1 ist kleiner oder gleich $\bar{x}_1$, also $y \ll \bar{y}_1$. Daher gibt es ein offenes U im Umgebungsfiter von 0 mit $y + U \leq \bar{y}_1$. Dann ist $V := (y + U) \cap D$ offen in D , und $\bar{y}_1 \leq V \leq \bar{y}_1$. Also ist $V \subset X_1$ und $y \in V$, da $0 \in U$. Folglich gilt $y \in V \subset \text{int}_X X_1 = U_1$.

Analoge Überlegungen sind für X_2 richtig. [4, Lemma 14.1] liefert nun die Behauptung. $\square$

Wir benötigen schließlich noch einen letzten Hilfssatz aus der Theorie der geordneten Banachräume:

(3.6) Lemma (vgl. [4, Thm. 14.4])

(E,P) sei ein Ordnungsbanachraum, dessen Kegel nichtleeres Inneres habe.

Gegeben seien zwei Elemente $\bar{y}, \bar{y} \in E$ mit $\bar{y} < \bar{y}$, und eine stark wachsende Abbildung $f : [\bar{y}, \bar{y}] \rightarrow E$. $D \subset [\bar{y}, \bar{y}]$ habe die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\bar{y}, \bar{y} \in D$;
- (ii) $f|D : D \rightarrow D$ sei kompakt;
- (iii) jeder Fixpunkt von f liege schon in D .

Ferner seien $\bar{y} < f(\bar{y})$ und $f(\bar{y}) < \bar{y}$. Bekanntlich existieren dann ein minimaler Fixpunkt $x_1 = \bar{x}$ und ein maximaler Fixpunkt $x_2 = \bar{x}$ in $[\bar{y}, \bar{y}]$. $\bar{x}$ und $\bar{x}$ mögen verschieden sein; ferner habe f in x_i stark positive und kompakte Ableitungen mit $\lambda_i := r(f'(x_i)) \neq 1$, $i = 1, 2$. ($r(\cdot)$ bezeichnet dabei den Spektralradius.)

Dann sind λ_i Eigenwerte zu $f'(x_i)$, und es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und stark positive Eigenvektoren h_i (i.e. $h_i \in P$), so daß

$$(3.6) \quad f(x_1 + \tau h_1) < x_1 + \tau h_1 < x_2 - \tau h_2 < f(x_2 - \tau h_2)$$

für jedes $\tau \in (0, \varepsilon_0)$ gilt.

Bemerkung:

Daß im Lemma nicht wie in [4, Thm. 14.4] die Existenz dreier Fixpunkte gefolgert wird, hat beweistechnische Gründe: Die Voraussetzungen reichen noch nicht aus. Dieser letzte Schritt soll daher erst angesichts der konkreten Situation des Theorems (3.3) getan werden.

Beweis von Lemma (3.6):

Daß λ_i ein Eigenwert von $f'(x_i)$ ist, der einen positiven Eigenvektor h_i hat, ist eine Aussage des Satzes von Kreĭn-Rutman (e.g. [4, Thm. 3.2]). Wegen $h_i = \lambda_i^{-1} f'(x_i) h_i$ ist h_i sogar stark positiv, denn $f'(x_i)$ ist stark positiv. Jetzt wollen wir zeigen, daß $r(f'(\bar{x})) < 1$ ist. Sonst wäre ja nach Voraussetzung $\lambda_1 > 1$, und [4, Lemma 7.5] impliziert die Existenz eines $\varepsilon > 0$ mit

$$f(\bar{x} - \tau h_1) < \bar{x} - \tau h_1 \text{ für jedes } \tau \in (0, \varepsilon).$$

Man wähle τ so klein, daß $\bar{y} < \bar{x} - \tau h_1$ ist (beachte, daß $\bar{y} < \bar{x}$, also

$\bar{y} < f(\bar{y}) < f(\bar{x}) = \bar{x}$ gilt, und wende Lemma (3.4) auf das Ordnungsintervall $[\bar{y}, \bar{x} - \tau h_1]$ an. Dort existiert dann ein Fixpunkt von f , was der Eigenschaft von $\bar{x}$, kleinster Fixpunkt zu sein, widerspricht.

Analog zeigt man $\lambda_2 < 1$.

Das bereits oben zitierte Lemma 7.5 in [4] verschafft uns nun ein $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$f(\bar{x} + \tau h_1) < \bar{x} + \tau h_1 \quad \text{und} \quad f(\hat{x} - \tau h_2) > \hat{x} - \tau h_2$$

für jedes $\tau \in (0, \varepsilon_0)$. Da die Fixpunkte $\bar{x}$ und $\hat{x}$ verschieden sind und somit $\bar{x} < \hat{x}$ erfüllen (f ist stark wachsend), reicht es, ε_0 gegebenenfalls zu verkleinern, um (3.6) zu erhalten. $\square$

Wir können nun beginnen, die Behauptungen über die Differentialgleichung zu beweisen.

Beweis von Theorem (3.1)

Man wende Satz (2.6) und Lemma (3.4) mit $\bar{y} := \bar{v}$, $\hat{y} := \hat{v}$,

$E = C^1(\bar{\Omega})$, $P := \{u \in C^1(\bar{\Omega}) \mid u \geq 0\}$, $f := S$ und $D := \bar{\mathcal{D}}$ an. $\square$

Beweis von Theorem (3.2)

Die Ergebnisse und Überlegungen des zweiten Paragraphen werden mit $\bar{v} := \bar{v}_1$ und $\hat{v} := \hat{v}_2$ angewendet. In (2.4), wo ja nur eine untere Schranke für m angegeben war, wähle man jetzt

$m := 1 + \max \{ \|\bar{v}_j\|_E, \|\hat{v}_j\|_E \mid j = 1, 2; E = C^1(\bar{\Omega}) \text{ oder } E = W_p^2(\Omega) \}$,
so daß $\bar{v}_j, \hat{v}_j \in \mathcal{D}$ gilt (vgl. (2.6), (2.20-21)). Die Behauptung folgt nun aus Lemma (3.5) und Satz (2.6). $\square$

Der Beweis des dritten Theorems erfordert noch weitere Vorbereitungen. Zunächst sei bemerkt, daß es für $g \in C^2(\partial\Omega \times \mathbb{R})$ eine Fortsetzung

$\hat{g} \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ gibt, die natürlich i.a. nicht eindeutig bestimmt ist.

Nachdem $\hat{g}$ aber einmal fest gewählt ist, soll zwischen g und $\hat{g}$ nicht mehr unterschieden werden. Die Konstruktion der fortgesetzten Funktion wird modulo leichter Modifikationen, die wir auslassen, z.B. in [16, Lemma 6.38] beschrieben.

(3.7) Lemma:

Für $g \in C^2(\partial\Omega \times \mathbb{R})$ (und damit o.E. $g \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$) liegt sein Nemytskii-Operator G in $C^1(C^1(\bar{\Omega}))$, und für alle $u, h \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt

$$(3.7) \quad G'(u)h = g_{\xi}(., u)h.$$

Beweis:

Mit u ist natürlich auch $G(u) = g(., u) \in C^1(\bar{\Omega})$, und man hat

$$DG(u) = D_x g(., u) + g_{\xi}(., u)Du. \text{ Ebenso ist } g_{\xi}(., u) \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Um die Behauptung zu beweisen, ist also

$$(3.8) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|G(u+h) - G(u) - g_{\xi}(., u)h\|_{C^1(\bar{\Omega})}}{\|h\|_{C^1(\bar{\Omega})}} = 0$$

für jedes $u \in C^1(\bar{\Omega})$ zu zeigen. Da für $u, h \in C^1(\bar{\Omega})$

$$\begin{aligned} & \|D_i(G(u+h) - G(u) - g_{\xi}(., u)h)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \\ & \leq \|D_i g(., u+h) - D_i g(., u) - D_i g_{\xi}(., u)h\|_{C(\bar{\Omega})} + \\ & + \|g_{\xi}(., u+h) - g_{\xi}(., u) - g_{\xi\xi}(., u)h\|_{C(\Omega)} \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} + \\ & + \|g_{\xi}(., u+h) - g_{\xi}(., u)\|_{C(\bar{\Omega})} \|h\|_{C^1(\bar{\Omega})} \end{aligned}$$

gilt - D_i kennzeichnet dabei die partielle Ableitung nach der i -ten Komponente von x - und da die Nemytskii-Operatoren von $D_i g$ und g_{ξ} differenzierbar, also insbesondere stetig sind, ergibt sich die Richtigkeit von (3.8). $\square$

(3.8) Lemma

Unter den Voraussetzungen des Theorems (3.3) gilt:

(i) $[\bar{v}, \bar{v}]_{C^1(\bar{\Omega})}$ hat nichtleeres Inneres; genauer ist

$$\{u \in [\bar{v}, \bar{v}] \mid u = S(u)\} \subset \text{int}_{C^1(\bar{\Omega})} [\bar{v}, \bar{v}].$$

(ii) $S : [\bar{v}, \bar{v}]_{C^1(\bar{\Omega})} \rightarrow [\bar{v}, \bar{v}]_{C^1(\bar{\Omega})}$ hat für jedes $u \in \text{int}_{C^1(\bar{\Omega})} [\bar{v}, \bar{v}]$ eine stark positive, kompakte Fréchetableitung $S'(u)$.

(iii) Für jeden Fixpunkt $u \in [\bar{v}, \bar{v}]_{C^1(\bar{\Omega})}$ von S gilt:

$h \in C^1(\bar{\Omega})$ erfüllt $S'(u)h = h$ genau dann, wenn h in $W_p^2(\Omega)$

liegt und das linearisierte Problem

$$(3.9) \quad \begin{aligned} Ah &= \sum_{j=1}^N f_{\eta_j}(x, u, Du) D_j h + f_{\xi}(x, u, Du) h \quad \text{in } \Omega \\ Bh &= g_{\xi}(x, u) h \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

löst.

Beweis:

Wie im Beweis des Satzes (2.1) nehmen wir o.E. $\omega = 0$ an. In diesem Zusammenhang sei noch auf die Äquivalenz von (3.9) mit

$$\begin{aligned} (A + \omega)h &= \sum_{j=1}^N (f_{\omega})_{\eta_j}(x, u, Du) D_j h + (f_{\omega})_{\xi}(x, u, Du) h \quad \text{in } \Omega \\ (B + \omega)h &= (g_{\omega})_{\xi}(x, u) h \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

hingewiesen.

(i) Unter den angegebenen Voraussetzungen existiert eine Lösung

$u \in [\bar{v}, \bar{v}]$ von (3.1) (vgl. Thm. (3.1)); also ist $v < u < \bar{v}$. Da

S stark wächst (Satz (2.6)), folgt sofort $S(\bar{v}) \ll u \ll S(\bar{v})$,

d.h. $u \in J := \text{int}_{C^1(\bar{\Omega})} [\bar{v}, \bar{v}]$. Da jeder Fixpunkt von S eine Lösung

von (3.1) liefert, folgt die Behauptung.

(ii) Zunächst zeigen wir, daß S in $u \in J$ differenzierbar ist. Dazu sei

an den Beweis des Satzes (2.1) erinnert, wo $S(u)$ durch Anwendung des impliziten Funktionentheorems bestimmt worden war. Es gilt ja - wir schreiben die Inhomogenitäten des Problems (2.3) jetzt zusätzlich in das Argument von H (vgl. (2.11)) -

$$(3.10) \quad \begin{aligned} 0 &= H(S(u), 0, u, u) \\ &= \lambda(S(u) - R(u)) + K(S(u) - \lambda F(S(u)) - u) . \end{aligned}$$

Wegen $\|S(u)\|_{C(\overline{\Omega})} \leq m$ ist $D_1 H(S(u), 0, u, u)$ ein Automorphismus von $C^1(\overline{\Omega})$. Um nun auf die Differenzierbarkeit von S in u

schließen zu können, genügt es daher,

$((u, v) \mapsto H(u, 0, v, v)) \in C^1([C^1(\overline{\Omega})]^2, C^1(\overline{\Omega}))$, zu zeigen. Dies ist aber klar, falls $R \in C^1(C^1(\overline{\Omega}))$ gilt.

Die letzte Behauptung wiederum ist eine Konsequenz aus der Differenzierbarkeit des Nemytskii-Operators G von g - wie schon oben identifizieren wir g mit einer Erweiterung $\hat{g}$ -, an die in Lemma (3.7) erinnert wurde. Bildet man nämlich ein $v \in C^1(\overline{\Omega})$ mittels G stetig differenzierbar nach $C^1(\overline{\Omega})$ ab, bettet in $W_p^1(\Omega)$ ein und schränkt dann auf $\partial\Omega$ ein, so daß $G(v)|_{\partial\Omega} \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, so erhält man $R(v) \in W_p^2(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, indem auf $G(v)|_{\partial\Omega}$ der Lösungsoperator $Q \in \mathcal{L}(W_p^{1-1/p}(\partial\Omega), W_p^2(\Omega))$ von $Au = 0$ in Ω , $Bu = c \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ angewendet wird. Bis auf G sind alle Operationen linear und stetig; man erhält also $R \in C^1(C^1(\overline{\Omega}))$ und für $v, h \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt mit (3.7)

$$(3.11) \quad R'(v)h = Q \circ G'(v)h = Q(g_{\xi}(\cdot, v)h) ,$$

wobei die verschiedenen Einbettungen nicht explizit aufgeschrieben sind.

Sei für $h \in C^1(\Omega)$ $w := S'(u)h$. Differenziert man (3.10), ergibt sich mit (3.11) $w \in W_p^2(\Omega)$, und w löst

$$(3.12) \quad \begin{aligned} w + \lambda(Aw - F'(S(u))w) &= h && \text{in } \Omega \\ Bw &= g_{\varepsilon}(x,u)h && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

g_{ε} ist wegen der Annahme $\omega = 0$ nicht negativ, und (2.8) macht [7, Lemma 1] (Verschärfung des Bony'schen Maximumprinzips) anwendbar, so daß die starke Positivität von $S'(u)$ folgt. Daß $S'(u)$ kompakt ist, wird klar, wenn wir noch einmal ausführlich aufschreiben, was sich nach Differenzieren von (3.10) mittels (3.11) ergibt, nämlich

$$S'(u) = Q \circ G'(v) - \lambda^{-1} K \circ (S'(u) - \lambda F'(S(u))S'(u) - \text{id}_{C^1(\overline{\Omega})}).$$

Wir brauchen jetzt nur noch daran zu erinnern, daß Q und K , aufgefaßt als Operatoren mit Bild in $C^1(\overline{\Omega})$, kompakt sind.

- (iii) Jeder Fixpunkt u von S liegt nach (i) in J . Die behauptete Äquivalenz folgt nun sofort aus (3.12), da ja für u gilt $k(.,u,Du) = f(.,u,Du)$ (vgl. (2.7)). $\square$

Wir sind jetzt bereit für den

Beweis von Theorem (3.3)

Das Lemma (3.6) soll zunächst angewendet werden. Wegen Satz (2.6) und Lemma (3.8) ist nur noch $r(S'(u_i)) \neq 1$, $i = 1, 2$, zu prüfen. Wäre dies nämlich der Fall, so gäbe es aufgrund des Satzes von Kreĭn-Rutman ein positives $h \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $S'(u_i)h = h$, das wegen Lemma (3.8) (iii) auch (3.9) löst; Widerspruch zur Voraussetzung!

Folglich gibt es stark positive $C^1(\overline{\Omega})$ -Funktionen h_1 und h_2 und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$S(\overline{u} + \tau h_1) < \overline{u} + \tau h_1 < \overline{u} - \tau h_2 < S(\overline{u} - \tau h_2) \quad \text{für } \tau \in (0, \varepsilon).$$

h_i gehört als Eigenfunktion von $S'(u_i)$ wegen (3.9) sogar zu $W_p^2(\Omega)$.

Da $\|u_i\|_{2,p} < M \leq \theta$ ist (vgl. (2.6) und (2.21)), kann man τ so klein wählen, daß $\max \{ \|u_i + \tau h_i\|_{2,p} \mid i = 1,2 \} \leq \theta$ gilt. Folglich sind $\bar{v}_1 := \bar{u} + \tau h_1$ und $\bar{v}_2 := \bar{u} - \tau h_2$ Elemente von $\mathcal{D}$, und die Anwendung von Theorem (3.2) mit $\bar{v}_1 := \bar{v}$ und $\bar{v}_2 := \bar{v}$ liefert die Behauptung. $\square$

4. Bemerkungen zum linearen Eigenwertproblem

In diesem Paragraphen wollen wir einige Eigenschaften des Eigenwertproblems

$$(4.1) \quad \begin{aligned} Au &= \lambda u && \text{in } \Omega \\ Bu &= \lambda u && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

in der Form zusammenstellen, wie sie später gebraucht werden. Alle Ergebnisse sind bekannt, zumindest bei leicht verschärften Voraussetzungen.

A und B seien die Differentialoperatoren aus (1.1) und (1.2); für die Koeffizienten von A fordern wir zusätzlich $a_{jk} \in C^2(\overline{\Omega})$ und $a_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $j, k = 1, \dots, N$. Dann definiert man

$$(4.2) \quad A'u := - \sum_{j,k=1}^N D_j D_k (a_{jk}(x)u) - \sum_{j=1}^N D_j (a_j(x)u) + a_0(x)u$$

und

$$(4.3) \quad B'u := \frac{\partial u}{\partial \beta} + b'_0(x)u,$$

wobei $\beta' \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $b'_0 \in C^1(\partial\Omega)$ so gewählt sein mögen, daß β' ein nirgends tangentiales, nach außen zeigendes Vektorfeld an $\partial\Omega$ sei und daß es eine überall auf $\partial\Omega$ positive Funktion $c_0 \in C^1(\partial\Omega)$ gebe, so daß die Green'sche Formel

$$(4.4) \quad \int_{\Omega} (vAu - uA'v) \, dx = \int_{\partial\Omega} (uB'v - c_0 vBu) \, d\sigma$$

für $u \in W_p^2(\Omega)$ und $v \in W_{p'}^2(\Omega)$ gilt (p' sei der zu p duale Exponent, also $1/p + 1/p' = 1$; σ bezeichne das Lebesgue'sche Oberflächenmaß).

Daß so etwas möglich ist, folgt für $C^2(\overline{\Omega})$ -Funktionen u und v aus [26, §§ 6-7]; im allgemeinen Fall gilt die Behauptung, da $C^2(\overline{\Omega})$ dicht in den o.a. Sobolevräumen liegt ([1, Thm. 3.18]). Beim Approximieren beachte man die Eigenschaften des Spuroperators.

Der folgende Satz über die Lösbarkeit von (4.1) ist sicher nicht überraschend:

(4.1) Satz

Die Eigenwertaufgabe (4.1) hat einen kleinsten Eigenwert $\lambda_0 \in \mathbb{R}$; der zugehörige Eigenraum ist eindimensional und wird o. E. von einer überall in $\bar{\Omega}$ positiven Eigenfunktion $\phi \in W_q^2(\Omega)$, $q \geq 1$ beliebig, erzeugt.

Eine analoge Aussage ist für das adjungierte Problem

$$(4.5) \quad \begin{aligned} A'v &= \mu v && \text{in } \Omega \\ B'v &= \mu c_0 v && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

richtig; ψ sei die den Eigenraum erzeugende Funktion. Der kleinste Eigenwert von (4.5) stimmt mit λ_0 überein.

Ferner gilt: Für $(a_0, b_0) \geq 0$ (resp. > 0) ist auch $\lambda_0 \geq 0$ (resp. > 0).

Bemerkung:

Der Satz ist natürlich eine Konsequenz des Kreĭn - Rutman - Theorems. Amann [6] gibt einen Beweis im Falle stärkerer Regularität der Daten, indem er einen geeigneten, (fast) stark positiven Operator auf $C(\bar{\Omega})$ konstruiert, dessen Eigenwerte die Reziproken von (4.1) sind. Dafür muß er jedoch zunächst eine schwierige a-priori-Abschätzung herleiten, deren Gebrauch wir im Moment noch vermeiden wollen.

Beweis von Satz (4.1):

$\omega > 0$ sei so gewählt, daß $(a_0 + \omega, b_0 + \omega) > 0$ gilt.

$S \in \mathcal{L}(L_p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega), W_p^2(\Omega))$ bezeichne den Lösungsoperator für $(A + \omega)u = c$ in Ω , $(B + \omega)u = d$ auf $\partial\Omega$. Für $Ku := S(u, u|_{\partial\Omega})$, $u \in C^1(\bar{\Omega})$, ist dann K ein kompakter linearer Operator auf $C^1(\bar{\Omega})$;

ferner ist aufgrund der Wahl von ω K stark positiv, denn B ist der Operator für das dritte Randwertproblem! Damit hat K wegen des Satzes von Kreĭn-Rutman einen größten Eigenwert $\omega_0 > 0$ samt erzeugender Eigenfunktion $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$, die positiv und dann sogar punktweise überall in $\bar{\Omega}$ positiv gewählt werden kann. Aus Regularitätsgründen ist $\phi \in W_q^2(\Omega)$. Durch Rechnen bestätigt man nun sofort, daß $\lambda_0 := 1/\omega_0 - \omega$ der kleinste Eigenwert von (4.1) ist, dessen Eigenraum von ϕ erzeugt wird.

Analog zeigt man die Existenz eines kleinsten Eigenwertes μ_0 mit Eigenfunktion $\psi(x) > 0$ für $x \in \bar{\Omega}$ für (4.5); der Faktor c_0 in der Randbedingung kann dabei im Stile von [4,§4] behandelt werden.

Schließlich folgt aus der Green'schen Formel mit $u = \phi$, $v = \psi$

$$(\lambda_0 - \mu_0) \int_{\Omega} \phi \psi \, dx = -(\lambda_0 - \mu_0) \int_{\partial\Omega} c_0 \phi \psi \, d\sigma, \text{ also } \lambda_0 = \mu_0.$$

Die Zusatzbehauptung über die Positivität von λ_0 ist eine Konsequenz des Maximumprinzips. $\square$

Jetzt sei noch ein Resultat angegeben, das in der ein oder anderen Form auch längst bekannt ist (e.g. [26,(7.11)], [25, chap. 2, Thm. 5.2]); für unsere Voraussetzungen ist ein neuer Beweis aber das einfachste.

(4.2) Satz

Für $(c,d) \in L_p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ ist

$$(4.6) \quad \begin{aligned} (A - \lambda_0)u &= c \quad \text{in } \Omega \\ (B - \lambda_0)u &= d \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

genau dann in $W_p^2(\Omega)$ lösbar, wenn

$$(4.7) \quad \int_{\Omega} c \psi \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 d \psi \, d\sigma = 0$$

gilt.

Beweis:

$\omega \in \mathbb{R}$ und die Operatoren S und K seien wie oben definiert. Mit Hilfe der Green'schen Formel prüft man leicht nach, daß

$$(4.8) \quad \int_{\Omega} c \psi \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 d \psi \, d\sigma = (\lambda_0 + \omega) \left(\int_{\Omega} S(c,d) \psi \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 S(c,d) \psi \, d\sigma \right)$$

gilt. Ebenso einfach sieht man, daß $u \in W_p^2(\Omega)$ genau dann (4.6) löst, wenn u eine $C^1(\bar{\Omega})$ -Lösung von $u - (\lambda_0 + \omega)Ku = S(c,d)$ ist.

Aufgrund der Riesz-Schauder-Theorie ist $(\lambda_0 + \omega)^{-1}$ auch ein einfacher Eigenwert des dualen Operators $K' \in \mathcal{X}(E)$, $E := [C^1(\bar{\Omega})]'$ (vgl. Beweis von Satz (4.1)). Wir wollen eine Erzeugende des Eigenraumes bestimmen.

Für $h \in W_p^1(\Omega)$ sei $R_h \in E$ definiert durch

$$\langle R_h, g \rangle := \int_{\Omega} hg \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 hg \, d\sigma$$

für alle $g \in C^1(\bar{\Omega})$; offenbar ist $\|R_h\|_E \leq \gamma \|h\|_{1,p}$ mit einer von h unabhängigen Konstanten $\gamma > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \langle K'R_{\psi}, g \rangle &= \int_{\Omega} S(g,g)\psi \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 S(g,g)\psi \, d\sigma \\ &= (\lambda_0 + \omega)^{-1} \left(\int_{\Omega} g\psi \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 g\psi \, d\sigma \right) \\ &= (\lambda_0 + \omega)^{-1} \langle R_{\psi}, g \rangle \end{aligned}$$

für alle $g \in C^1(\bar{\Omega})$; es folgt $\ker[\text{id}_E - (\lambda_0 + \omega)K'] = \mathbb{R} R_{\psi}$.

Aufgrund der Fredholm'schen Alternative und der oben gemachten Bemerkung über die Lösbarkeit von (4.6) ist die Behauptung richtig; denn $S(c,d) \in {}^{\perp}\{R_{\psi}\}$, d.h. $\langle R_{\psi}, S(c,d) \rangle = 0$ ist wegen (4.8) äquivalent zu (4.7). $\square$

5. Ein invariantes Kriterium für die Existenz von Unter- und Oberlösungen

Im dritten Paragraphen wurde gezeigt, daß im wesentlichen die Existenz von Unter- und Oberlösungen für die Aufgabe

$$(5.1) \quad \begin{array}{ll} Au = f(x, u, Du) & \text{in } \Omega \\ Bu = g(x, u) & \text{auf } \partial\Omega \end{array}$$

ausreicht, um auf die Existenz einer Lösung schließen zu können. In diesem Paragraphen sollen hinreichende Bedingungen angegeben werden, die gewährleisten, daß es Unter- und Oberlösungen gibt. Wie in [19] für den Fall $g = 0$, wenn B der Dirichlet-Randoperator ist, oder auch [20] im Falle einer mild nichtlinearen Gleichung unter homogenen Randbedingungen sind dies Kriterien, die die Interaktion der rechten Seiten mit dem kleinsten Eigenwert einer linearen Randwertaufgabe - in unserem Fall wird diese (4.1) sein - beschreiben.

Die Koeffizienten von A seien wie schon im vorigen Paragraphen genügend glatt, d.h. $a_{jk} \in C^2(\bar{\Omega})$, $a_j \in C^1(\bar{\Omega})$, $j, k = 1, \dots, N$, und $a_0 \in C(\bar{\Omega})$. Dann existiert der kleinste Eigenwert $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ von (4.1) und (4.5) mit zugehörigen, überall in $\bar{\Omega}$ positiven Eigenfunktionen ϕ und ψ aus $W_q^2(\Omega)$, $q \geq 1$.

Um das Hauptresultat dieses Abschnittes formulieren zu können, beschreiben wir nun die Voraussetzungen an die Nichtlinearitäten.

Sofern $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und bzgl. $\eta \in \mathbb{R}^N$ höchstens quadratisches Wachstum hat, gibt es wegen der gleichmäßig positiven Definitheit der Matrix (a_{jk}) Funktionen $b^\pm \in C(\bar{\Omega})$ und $F^\pm \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ mit

$$(5.2) \quad F^-(x, \xi) + b^-(\xi) \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) \eta^j \eta^k \leq f(x, \xi, \eta) \leq \\ \leq F^+(x, \xi) + b^+(\xi) \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) \eta^j \eta^k$$

für alle $(x, \xi, \eta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^N)$. Falls f bzgl. ξ stetig differenzierbar ist, können $F^\pm$ mit der gleichen Eigenschaft gewählt werden.

Bemerkung:

Unter den angegebenen Voraussetzungen an f können in (5.2) F^+ und F^- unabhängig von $x \in \bar{\Omega}$ gewählt werden, da f ja auch unabhängig von x abschätzbar ist (vgl. (1.5)). Es ist dennoch günstig, dies im Interesse möglichst scharfer Abschätzungen i.a. nicht zu tun. Außerdem erleichtert die angegebene Form von (5.2) die Anwendung auf mild nichtlineare Aufgaben, wo man $F^\pm = f$, $b^\pm = 0$ setzt. Schließlich ist die volle Ungleichung auch notwendig, wenn weniger restriktive Voraussetzungen an die Regularität von f gestellt werden, was zwar möglich ist, hier aber nicht durchgeführt werden soll (vgl. hierzu [19, (2.2)-(2.4)]).

Wie in [19] definieren wir

$$(5.3) \quad Q^\pm(\xi) := \int_0^\xi \exp\left(\int_0^r b^\pm(y) dy\right) dr \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}.$$

0. E. gelte (durch eventuelles Vergrößern von b^+ und Verkleinern von b^-)

$$(5.4) \quad Q^+(\infty) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} Q^+(\xi) = \infty \quad \text{und} \quad Q^-(-\infty) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} Q^-(\xi) = -\infty$$

Ferner sei

$$(5.5) \quad \Gamma^{\pm}(x, \xi) := Q_{\xi}^{\pm}(\xi) F^{\pm}(x, \xi) + a_0(x) \kappa^{\pm}(\xi) - \lambda_0 Q^{\pm}(\xi)$$

für $(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ mit

$$(5.6) \quad \kappa^{\pm}(\xi) := Q^{\pm}(\xi) - \xi Q_{\xi}^{\pm}(\xi);$$

dabei sei natürlich $Q_{\xi}^{\pm} = (Q^{\pm})'$. Falls es eine Funktion $\gamma \in L_p(\Omega, \mathbb{R}_+)$ gibt mit

$$(5.7)^{\pm} \quad \Gamma^{\pm}(\cdot, \xi) \leq \gamma \quad \text{für } \gamma > 0 \quad \text{bzw.} \quad \Gamma^{\pm}(\cdot, \xi) \geq -\gamma \quad \text{für } \gamma < 0,$$

so sei

$$(5.8) \quad f^+ := \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \Gamma^+(\cdot, \xi) \quad \text{bzw.} \quad f^- := \liminf_{\xi \rightarrow -\infty} \Gamma^-(\cdot, \xi).$$

Ähnlich definieren wir

$$(5.9) \quad \Delta^{\pm}(x, \xi) := Q_{\xi}^{\pm}(\xi) g(x, \xi) + b_0(x) \kappa^{\pm}(\xi) - \lambda_0 Q^{\pm}(\xi)$$

für $(x, \xi) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ und

$$(5.10) \quad \delta^+ := \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \Delta^+(\cdot, \xi) \quad \text{bzw.} \quad \delta^- := \liminf_{\xi \rightarrow -\infty} \Delta^-(\cdot, \xi),$$

sofern die Limites existieren.

Wir formulieren jetzt den Hauptsatz dieses Paragraphen, das

(5.1) Theorem

$f: \bar{\Omega} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^N$ sei stetig und stetig differenzierbar bzgl. $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^{N+1}$; ferner habe f bzgl. $\eta \in \mathbf{R}^N$ höchstens quadratisches Wachstum. Die Bedingung (5.7)[±] sei erfüllt.

$g: \partial\Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sei lokal lipschitzstetig, und es gebe Funktionen $g^\pm \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ mit $\Delta^+(\cdot, \xi) \leq g^+$ für alle genügend großen und $\Delta^-(\cdot, \xi) \geq g^-$ für alle genügend kleinen $\xi \in \mathbf{R}$; insbesondere ist also $\delta^+ \leq g^+$ und $\delta^- \geq g^-$.

Falls

$$(5.11) \quad \int_{\Omega} f^+ \psi \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 g^+ \psi \, d\sigma < 0 < \int_{\Omega} f^- \psi \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 g^- \psi \, d\sigma$$

gilt, hat (5.1) mindestens eine Lösung $u \in W_p^2(\Omega)$. Die Werte ∞ bzw. $-\infty$ für die Integrale über f^- bzw. f^+ sind oben zugelassen.

Bemerkungen:

1. Im Falle linearer Resonanz, d.h. $f(x, \xi, \eta) = \tilde{f}(x) + \lambda_0 \xi$, $g(x, \xi) = \tilde{g}(x) + \lambda_0 \xi$, reduziert sich (5.11) zu der nie richtigen Ungleichungskette $0 < \int_{\Omega} \tilde{f} \psi \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 \tilde{g} \psi \, d\sigma < 0$; hier muß natürlich Satz (4.2) einspringen.

2. (5.11) ist eine Resonanzbedingung vom Landesman-Lazer-Typ. "Resonanz" im nichtlinearen Fall soll im Sinne von [14, p.2] bedeuten: $f^\pm$ oder $g^\pm$ dürfen auf Mengen positiven Maßes gleich Null sein. Deutlicher noch wird die Analogie von (5.11) mit den üblichen Resonanzbedingungen (e.g. [14, Thm. 4], [23, Thm. 5.2]), wenn man sich auf den mild nichtlinearen Fall beschränkt. Wegen $Q^\pm = \text{id}_{\mathbf{R}}$ und

$\kappa^\pm = 0$ ist dann nämlich $r^\pm(x, \xi) = f(x, \xi) - \lambda_0 \xi$ und $\Delta^\pm(x, \xi) = g(x, \xi) - \lambda_0 \xi$.

Für $g = 0$ reduziert sich (5.11) jedoch i.a. nicht auf die für Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu erwartende Bedingung (26) in [14] oder auf [19, (2.12)]. Der Grund ist, daß in beiden Arbeiten die Interaktion der Nichtlinearität mit dem kleinsten Eigenwert ν_0 von $Au = \nu u$ in Ω , $Bu = 0$ auf $\partial\Omega$ gemessen wird, während wir den kleinsten Eigenwert λ_0 von (4.1) benutzen, der ja kleiner als ν_0 ist ([6, Thm. (2.2)]).

3. Die Idee, die die letzte Bemerkung liefert, könnte man ausbauen: Anstatt λ_0 wie hier oder ν_0 wie in [14] oder [10, IV.2] oder [19, (2.12)] zum Vergleich mit den Nichtlinearitäten zu benutzen, könnte man analog zu (5.11) eine Existenzbedingung formulieren, die mit dem kleinsten Eigenwert von $Au = \lambda m(x)u$ in Ω , $Bu = \lambda r(x)u$ auf $\partial\Omega$ arbeitet (vgl. [6, Thm. (2.2)] zu diesem Eigenwertproblem). Spezielle Wachstumseigenschaften der vorgegebenen rechten Seiten könnten dann in einem gewissen Rahmen durch passende Wahl von m und r berücksichtigt werden.

Der Beweis des Theorems (5.1) folgt mit Theorem (3.1) sofort aus dem

(5.2) Satz

f und g mögen die Regularitätsvoraussetzungen des Thms. (5.1) (d.h. (3.2) und (3.3)) erfüllen; ferner gelte $(5.7)^+$ und es gebe ein $g^+ \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ mit $\Delta^+(\cdot, \xi) \leq g^+$ für alle genügend großen $\xi \in \mathbb{R}$. Falls nun

$$(5.12) \quad \int_{\Omega} f^+ \psi \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 g^+ \psi \, d\sigma < 0$$

gilt, so existiert zu jedem $z \in C(\overline{\Omega})$ eine Oberlösung $\hat{v} \in W_p^2(\Omega)$ von (5.1) mit $\hat{v} \geq z$.

Eine analoge Aussage garantiert die Existenz von Unterlösungen.

Der Beweis orientiert sich an Proposition 2.13 in [19], wo die Autoren eine ähnliche Aussage für Dirichlet-Randbedingungen beweisen.

Seien $F(x, \zeta) := Q_\xi^+(\xi) F^+(x, \xi) + a_0(x) \kappa^+(\xi)$ für $x \in \overline{\Omega}$ und $\xi \in \mathbb{R}$, $\zeta = Q^+(\xi)$, und $G(x, \zeta) := Q_\xi^+(\xi) g(x, \xi) + b_0(x) \kappa^+(\xi)$ für $x \in \partial\Omega$, ζ wie oben. Ferner sei $v \in W_p^2(\Omega)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(5.13) \quad \begin{array}{ll} Av \geq F(x, v) & \text{in } \Omega \\ Bv \geq G(x, v) & \text{auf } \partial\Omega \end{array}$$

mit $v \geq Q^+ \circ z = Q^+(z)$ (Funktionen von ξ werden wir häufig mit ihren Nemytskii-Operatoren identifizieren). Dann ist $\hat{v} := (Q^+)^{-1}(v)$ eine Oberlösung von (5.1) mit $\hat{v} \geq z$, denn:

Zunächst folgt aus (5.3) und (5.4), daß Q^+ ein wachsender C^2 -Diffeomorphismus von $\mathbb{R}$ auf $I := Q^+(\mathbb{R})$ ist, so daß insbesondere die Definitionen von F , G und $\hat{v}$ sinnvoll sind. Da $W_p^2(\Omega)$ in $C^1(\overline{\Omega})$ eingebettet ist, liegt $\hat{v}$ sogar in $W_p^2(\Omega)$; genauer hat man

$$\begin{aligned} A\hat{v} &= \frac{1}{Q_\xi^+(\hat{v})} (Av - a_0(x) \kappa^+(\hat{v})) + b^+(\hat{v}) \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) D_j \hat{v} D_k \hat{v} \\ &\geq F^+(x, \hat{v}) + b^+(\hat{v}) \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) D_j \hat{v} D_k \hat{v} \geq f(x, \hat{v}, D\hat{v}) \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

wegen (5.2) und

$$B\hat{v} = \frac{1}{Q_\xi^+(\hat{v})} (Bv - b_0(x) \kappa^+(\hat{v})) \geq g(x, \hat{v}) \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Da auch $\hat{v} \geq z$ gilt, erfüllt $\hat{v}$ die geforderten Bedingungen.

Die Lösbarkeit der mild nichtlinearen Aufgabe (5.13) folgt aus einem von Brézis und Nirenberg stammenden Trick [10, Thm. IV.7].

Wegen $F(x, \zeta) - \lambda_0 \zeta = \Gamma^+(x, \zeta)$, $\zeta = Q^+(\zeta)$, und wegen der Monotonie von Q^+ ist $\limsup_{\zeta \rightarrow \infty} (F(\cdot, \zeta) - \lambda_0 \zeta) = f^+$. Daher gilt mit

$$h_j := \inf_{\substack{v \geq j\phi \\ v \in C(\bar{\Omega})}} (\lambda_0 v - F(\cdot, v)), \quad j \in \mathbb{N}, \text{ da\ss } h_j \text{ wegen (5.7)}^+ \text{ in}$$

$L_p(\Omega)$ liegt und da\ss die Folge (h_j) f.ü. monoton gegen $-f^+$ konvergiert. Aus dem Satz über die monotone Konvergenz und der Voraussetzung (5.12) folgt, da\ss für alle genügend gro\ssen $j \in \mathbb{N}$

$$(5.14) \quad \int_{\Omega} h_j \psi \, dx - \int_{\partial\Omega} c_0 g^+ \psi \, d\sigma > 0$$

gilt. Man wähle nun $\zeta_0 > 0$ mit $\Delta^+(\cdot, \xi) = G(\cdot, \zeta) - \lambda_0 \zeta \leq g^+$ auf $\partial\Omega$ für $\zeta \geq \zeta_0$ und $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $j_0 \phi \geq \zeta_0$ in $\bar{\Omega}$ und setze $h := h_{j_0}$.

Wegen (5.14) kann man $M \in \mathbb{R}$ so finden, da\ss $\bar{h} := (\int_{\Omega} h \psi \, dx + M) / \int_{\Omega} \psi \, dx > 0$

und $\bar{k} := -(\int_{\partial\Omega} c_0 g^+ \psi \, d\sigma + M) / \int_{\partial\Omega} c_0 \psi \, d\sigma > 0$ richtig ist.

Mit $c := -h + \bar{h} \in L_p(\Omega)$ und $d := g^+ + \bar{k} \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ ist die Voraussetzung (4.6) des Satzes (4.2) erfüllt, so da\ss es ein

$v_0 \in W_p^2(\Omega)$ mit

$$(5.15) \quad \begin{aligned} (A - \lambda_0)v_0 &= -h + \bar{h} && \text{in } \Omega \\ (B - \lambda_0)v_0 &= g^+ + \bar{k} && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

gibt. Man wähle nun $\mu \geq 0$ so gro\ss, da\ss $v := v_0 + \mu\phi$ nicht kleiner als $\max\{j_0\phi, Q^+(z)\}$ ist; dann folgt

$$Av = F(x, v) + (\lambda_0 v - F(x, v)) - h + \bar{h} > F(x, v) \quad \text{in } \Omega$$

nach Definition von h wegen $v \geq j_0 \phi$ und

$$Bv = \lambda_0 v + g^+ + \bar{K} > \lambda_0 v + (G(x, v) - \lambda_0 v) \quad \text{auf } \partial\Omega$$

wegen $v \geq j_0 \phi \geq \zeta_0$. $\square$

Bemerkung:

f^+ (in (5.8)) und δ^+ (in (5.10)) sind in analoger Weise definiert worden. Man muß sich daher fragen, ob nicht $\int_{\Omega} f^+ \psi \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 \delta^+ \psi \, d\sigma < 0$ anstelle von (5.12) die adäquate Existenzbedingung für eine Oberlösung ist. Die Rechtfertigung für die Wahl von (5.12) ist technischer Natur; denn um (5.15) zu lösen, benötigt man Randwerte in $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$. Bei Verwendung von δ^+ hätte man aber analog zur Definition von h_j mit den Infima über gewisse Funktionenmengen weiterrechnen müssen, die lediglich in $L_p(\partial\Omega)$ liegen. Auch eine Approximation durch glatte Funktionen könnte da nicht weiterhelfen.

Die hier angegebene Voraussetzung für g hat ihren Ursprung in [20, p. 571, cond. (B_+)], wo eine etwa analoge Bedingung an die rechte Seite der Differentialgleichung im Falle einer mild nichtlinearen Aufgabe mit homogenen Randwerten gestellt wird. Im Lemma 2.3 derselben Arbeit von Kazdan und Warner wird auch gezeigt, wie man zu einer allgemeineren, noch hinreichenden Bedingung (A_+) kommen kann, die auch auf das hier behandelte Problem übertragbar ist. Wir wollen aber nicht näher darauf eingehen.

Stattdessen sei lieber auf die bemerkenswerte Eigenschaft der Existenzbedingung (5.11) hingewiesen, ebenso wie das Randwertproblem (5.1) unter C^2 -Substitutionen der Form $v = F(u)$ invariant zu bleiben.

(5.3) Theorem

Die Bedingungen des Theorems (5.1) sind invariant unter Substitutionen der Form $v = F(u)$, wobei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein C^2 -Diffeomorphismus sei.

Bemerkung:

Dieses Ergebnis verallgemeinert Thm. 2.16 in [19]. Dort mußten die Autoren noch die Voraussetzung $F(0) = 0$ machen, um die Invarianz der dort behandelten homogenen Dirichlet-Randbedingungen zu sichern.

Beweis von Theorem (5.3):

Falls $u \in W_p^2(\Omega)$ eine Lösung von (5.1) ist, so löst $v = F(u) \in W_p^2(\Omega)$ die Aufgabe

$$Av = \tilde{f}(x, v, Dv) \quad \text{in } \Omega$$

$$Bv = \tilde{g}(x, v) \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit $\tilde{f}(x, \zeta, \chi) := F'(\xi)f(x, \xi, \eta) + a_0(x)(F(\xi) - \xi F'(\xi)) - F''(\xi) \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) \eta^j \eta^k$

für $(x, \zeta, \chi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $(\zeta, \chi) = (F(\xi), F'(\xi)\eta^1, \dots, F'(\xi)\eta^N)$,

und $\tilde{g}(x, \zeta) := F'(\xi)g(x, \xi) + b_0(x)(F(\xi) - \xi F'(\xi))$ für $(x, \zeta) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$,
 ζ wie oben.

Es ist also zu zeigen, daß sich die in Thm. (5.1) an f und g gestellten Voraussetzungen auf $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ übertragen.

Für die Regularitätsvoraussetzungen ist das sicher richtig; ebenso hat $\tilde{f}$ in x wie f in η höchstens quadratisches Wachstum.

Im Falle $F'(\xi) > 0$ für $\xi \in \mathbb{R}$ geht man nun so vor: Wie in [19, (2.20-21)] definiert man $\tilde{f}^\pm$ und $\tilde{g}^\pm$, die eine zu (5.2) analoge Abschätzung für $\tilde{f}$ liefern, und mit deren Hilfe $\tilde{Q}^\pm$, für die $\tilde{Q}^\pm(\zeta) = F'(0)Q^\pm(\xi)$ ([19, (2.22)]) gilt. Nach kurzem Rechnen er-

kennt man dann für $\hat{\gamma}^{\pm}$ und $\hat{\lambda}^{\pm}$, die in Analogie zu (5.5) und (5.9) definiert seien, die Richtigkeit von $\hat{\gamma}^{\pm}(\cdot, \zeta) = F'(\cdot) \gamma^{\pm}(\cdot, \xi)$ und $\hat{\lambda}^{\pm}(\cdot, \zeta) = F'(\cdot) \Delta^{\pm}(\cdot, \xi)$. Damit folgt die Behauptung.

Im Falle $F'(\xi) < 0$ für $\xi \in \mathbb{R}$ sei $\tilde{F}(\xi) := F(-\xi)$, so daß $\tilde{F}$ ein C^2 -Diffeomorphismus mit $\tilde{F}'(\xi) > 0$ ist. Daher muß nur noch der Fall der Substitution $\xi \mapsto -\xi$ behandelt werden, für den die Behauptung aber fast offensichtlich ist. $\square$

Zum Schluß dieses Paragraphen geben wir noch einige Bedingungen an, aus denen die Existenz einer Oberlösung resp. einer Unterlösung geschlossen werden kann. Es sei darauf hingewiesen, daß im folgenden Korollar im Gegensatz zu Satz (5.2) Resonanz ausgeschlossen ist.

(5.4) Korollar

f und g mögen (3.2) und (3.3) erfüllen. Falls außerdem eine der Voraussetzungen

$$(5.16) \quad \limsup_{\xi \rightarrow \infty} (Q_{\xi}^{+}(\xi) F^{+}(\cdot, \xi) + a_0 \kappa^{+}(\xi)) / Q^{+}(\xi) < \lambda_0 \quad \text{gleichmäßig in } \Omega$$

oder

$$(5.17) \quad \limsup_{\xi \rightarrow \infty} (F_{\xi}^{+}(\cdot, \xi) + b^{+}(\xi)F^{+}(\cdot, \xi) - \xi b^{+}(\xi)a_0) < \lambda_0 \quad \text{gleichmäßig in } \Omega$$

und eine der Voraussetzungen

$$(5.18) \quad \limsup_{\xi \rightarrow \infty} (Q_{\xi}^{+}(\xi) g(\cdot, \xi) + b_0 \kappa^{+}(\xi)) / Q^{+}(\xi) < \lambda_0 \quad \text{gleichmäßig auf } \partial\Omega$$

oder

$$(5.19) \quad \limsup_{\xi \rightarrow \infty} (g_{\xi}^{+}(\cdot, \xi) + b^{+}(\xi)g(\cdot, \xi) - \xi b^{+}(\xi)b_0) < \lambda_0 \quad \text{gleichmäßig auf } \partial\Omega$$

erfüllt sind, so gibt es zu jedem $z \in C(\overline{\Omega})$ eine Oberlösung $\bar{v} \in W_p^2(\Omega)$ von (5.1) mit $\bar{v} \geq z$.

Bemerkungen:

1. Unter analogen Voraussetzungen folgt die Existenz einer Unterlösung $\bar{v} \leq z$, wobei z. B. (5.16) durch

(5.16)⁻ $\limsup_{\xi \rightarrow \infty} (Q_{\xi}^{-}(\xi) F^{-}(\cdot, \xi) + a_0 \kappa^{-}(\xi)) / Q^{-}(\xi) < \lambda_0$ gleichmäßig in Ω ersetzt werden muß.

2. Das Korollar verallgemeinert [19, Thm. 2.28]. Es sei aber wieder auf die unterschiedliche Bedeutung von λ_0 im Korollar und dem kleinsten Eigenwert λ_1 des o.a. Theorems hingewiesen (vgl. Bemerkung 2 zu Theorem (5.1)).

3. Im mild nichtlinearen Fall mit $Q^{\pm} = \text{id}_{\mathbb{R}}$, $\kappa^{\pm} = b^{\pm} = 0$ vereinfachen sich die angegebenen Bedingungen zusehends: Sie schränken im wesentlichen die Steigung von $f(x, \cdot)$ und $g(x, \cdot)$ gleichmäßig für x in Ω bzw. $\partial\Omega$ im Unendlichen ein. Das Korollar schließt dann Existenzsätze wie [6, Thm. (2.4)] für $m = \mathbb{I}$, $r = \mathbb{I}$ ein, $\mathbb{I}(x) := 1$.

Beweis von Korollar (5.4):

Die Voraussetzungen an g werden etwa ebenso behandelt wie die an f , wobei letzteres im wesentlichen schon in [19] durchgeführt ist. Wir können uns daher kurz fassen.

Sei zunächst (5.16) erfüllt. Dann existieren reelle Zahlen $\gamma < \lambda_0$ und $\xi_0 > 0$ mit $Q_{\xi}^{+}(\xi) F^{+}(x, \xi) + a_0(x) \kappa^{+}(\xi) < \gamma Q^{+}(\xi)$ für alle $\xi \geq \xi_0$ und $x \in \Omega$; folglich gilt $\Gamma^{+}(x, \xi) < (\gamma - \lambda_0) Q^{+}(\xi) < 0$. Daraus folgt sofort (5.7)⁺ und wegen der Positivität von ψ auch $\int_{\Omega} f^{+} \psi \, dx < 0$, da $Q^{+}(\infty) = \infty$ ist.

Ebenso zeigt man, daß (5.18) die Ungleichung $\int_{\partial\Omega} c_0 g^{+} \psi \, d\sigma < 0$ impliziert.

Nun gelte (5.19). Da $g(x, \cdot)$ für festes $x \in \partial\Omega$ auf kompakten Intervallen lipschitzstetig, insbesondere also auch absolutstetig ist, kann es f.ü. in $\mathbb{R}$ differenziert werden und ist unbestimmtes Integral seiner Ableitung. Insbesondere macht (5.19) Sinn.

Mit geeigneten reellen Zahlen $\gamma < \lambda_0$ und $\xi_0 > 0$ ist

$$g_\xi(x, \xi) + b^+(\xi)g(x, \xi) - \xi b^+(\xi)b_0(x) < \gamma \quad \text{für } (x, \xi) \in \partial\Omega \times [\xi_0, \infty).$$

Nach Subtraktion von λ_0 und anschließender Multiplikation des positiven

$Q_\xi^+(\xi)$ erhält man $\Delta_\xi^+(x, \xi) < (\gamma - \lambda_0) Q_\xi^+(\xi)$, also durch Integration

$\Delta^+(x, \xi) < \Delta^+(x, \xi_0) + (\gamma - \lambda_0)(Q^+(\xi) - Q^+(\xi_0))$. Wieder wegen

$Q^+(\infty) = \infty$ folgt die Existenz eines geeigneten $g^+ \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$

(man wähle eine negative Konstante für g^+) mit $\int_{\partial\Omega} c_0 g^+ \psi \, d\sigma < 0$.

Genauso folgert man aus (5.18), daß $\int_\Omega f^+ \psi \, dx < 0$ gilt.

In jedem Fall ist also (5.12) erfüllt, woraus sich die Behauptung ergibt. $\square$

Der Beweis läßt erkennen, daß man leicht eine Reihe verwandter Existenzbedingungen aufstellen kann. Zum Beispiel könnte man Voraussetzungen des Korollars mit solchen des Satzes (5.2) kombinieren.

6. Die Existenz einer Lösung im Falle parameterabhängiger Nichtlinearitäten

Wir betrachten in diesem Paragraphen Randwertaufgaben der Form

$$(6.1)_t \quad \begin{aligned} Au &= f(x, u, Du, t) && \text{in } \Omega \\ Bu &= g(x, u, t) && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei die rechten Seiten von einem zusätzlichen Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängen. Zum Beispiel könnte t die Rolle eines Eigenwertes in einem nichtlinearen Eigenwertproblem spielen.

(6.1) ist für den Fall homogener Randbedingungen beim Dirichlet- und Neumannproblem von Kazdan und Warner in [20, § 3] untersucht worden, wenn f nicht vom Gradienten abhängt; Aussagen im Fall des homogenen Dirichletproblems mit $f(\cdot, \xi, \eta, t) = a + t h + G(\cdot, \xi, \eta)$, $a, h \in L_p(\Omega)$, $h(x) > 0$ für $x \in \Omega$, findet man in [19]. In beiden Arbeiten werden Bedingungen für die Existenz eines reellen t_0 angegeben, unterhalb dessen die dort jeweils behandelten Aufgaben mindestens eine, oberhalb keine Lösung haben. Ausgehend von [20] können Amann und Hess [8] sogar zeigen, daß für reelle t unterhalb von t_0 mindestens zwei Lösungen existieren.

Daß es auch für das semilineare Problem mit nichtlinearen Randbedingungen ein solches t_0 mit der Eigenschaft gibt, zwischen Existenz- und Nichtexistenz-Bereichen zu trennen, werden wir gleich zeigen. Mit einer Verallgemeinerung des Multiplizitätsresultates in [8] beschäftigen wir uns dann im nächsten Paragraphen.

Die Koeffizienten von A mögen auch jetzt wieder dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften haben wie in § 4; ϕ bzw. $\psi \in W_p^2(\Omega)$ seien die in $\bar{\Omega}$ positiven Eigenfunktionen von (4.1) bzw. (4.5) zum Eigenwert $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Für f und g fordern wir

$$(6.2) \quad \begin{aligned} f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig und stetig differenzierbar} \\ \text{bzgl. } (\xi, \eta, t) \in \mathbb{R}^{N+2}. \text{ Bzgl. } \eta \in \mathbb{R}^N \text{ hat } f \text{ höchstens} \\ \text{quadratisches Wachstum, d.h. es existiert eine in der ersten} \\ \text{Variablen monoton wachsende Funktion } c: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ mit} \\ |f(x, \xi, \eta, t)| \leq c(|\xi|, t) (1 + |\eta|^2) \text{ für } (x, \xi, \eta, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{N+2} \end{aligned}$$

und

$$(6.3) \quad \begin{aligned} g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist bzgl. } (x, \xi) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \text{ lokal lipschitz-} \\ \text{stetig und bzgl. } t \in \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar.} \end{aligned}$$

Um die Abhängigkeit von t näher zu spezifizieren, setzen wir die Existenz von Funktionen $h \in C(\bar{\Omega})$ und $\hat{h} \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ mit

$$(6.4) \quad f_t(x, \xi, \eta, t) \geq h(x) > 0 \quad \text{für alle } (x, \xi, \eta, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^{N+2}$$

und

$$(6.5) \quad g_t(x, \xi, t) \geq \hat{h}(x) > 0 \quad \text{für alle } (x, \xi, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^2$$

voraus. Falls $g(x, \xi, t) = \bar{g}(x, \xi) + t\hat{h}(x)$ gilt, ist (6.5) sicher richtig; Analoges gilt auch für f und (6.4).

Wegen (6.2) existieren für festes $t \in \mathbb{R}$ stetige Funktionen

$$f^\pm(\cdot, \cdot, t): \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b^\pm(\cdot, t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ die}$$

$$(6.6) \quad \begin{aligned} F^-(x, \xi, t) + b^-(\xi, t) \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) \eta^j \eta^k &\leq f(x, \xi, \eta, t) \leq \\ &\leq F^+(x, \xi, t) + b^+(\xi, t) \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) \eta^j \eta^k \end{aligned}$$

für alle $(x, \xi, \eta, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{N+2}$ erfüllen.

Da aus (6.4) und (6.6) für $t \geq 0$

$$f(x, \xi, \eta, t) \geq th(x) + f(x, \xi, \eta, 0) \geq th(x) + F^-(x, \xi, 0) + b^-(\xi, 0) \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) \eta^j \eta^k$$

folgt, werden wir (fast) o. E. für $(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ und $t \geq 0$

$$(6.7) \quad \begin{aligned} F^-(x, \xi, t) &= th(x) + F^-(x, \xi, 0) \quad \text{und} \\ b^-(\xi, t) &= b^-(\xi, 0) \end{aligned}$$

setzen. Mit

$$(6.8) \quad Q^\pm(\xi, t) := \int_0^t \exp\left(\int_0^r b^\pm(y, t) dy\right) dr, \quad Q^\pm(\xi) := Q^\pm(\xi, 0)$$

und

$$(6.9) \quad \kappa^\pm(\xi, t) := Q^\pm(\xi, t) - \xi Q_\xi^\pm(\xi, t), \quad \kappa^\pm(\xi) := \kappa^\pm(\xi, 0)$$

für $\xi \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ (o. E. gelte wie in (5.4) wieder $Q^\pm(\pm\infty, \cdot) = \pm\infty$) definieren wir

$$(6.10) \quad A^-(x, \xi, t) := \frac{1}{Q^-(\xi)} (Q_\xi^-(\xi) (th(x) + F^-(x, \xi, 0)) + a_0(x) \kappa^-(\xi))$$

und

$$(6.11) \quad B^-(y, \xi, t) := \frac{1}{Q^-(\xi)} (Q_\xi^-(\xi) (t\hat{h}(y) + g(y, \xi, 0)) + b_0(y) \kappa^-(\xi))$$

für $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \partial\Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

(6.1) Theorem

f und g mögen die Voraussetzungen (6.2) bis (6.5) erfüllen; au-

ßerdem gelte

$$(6.12) \quad \int_0^\xi b^-(r,0) dr \geq \text{const. für alle } \xi \geq 0;$$

$$(6.13) \quad \limsup_{\xi \rightarrow -\infty} (Q_\xi^-(\xi,t) F^-(\cdot,\xi,t) + a_0 \kappa^-(\xi,t)) / Q^-(\xi,t) < \lambda_0 \text{ glm. in } \Omega$$

und

$$(6.14) \quad \limsup_{\xi \rightarrow -\infty} (Q_\xi^-(\xi,t) g^-(\cdot,\xi,t) + b_0 \kappa^-(\xi,t)) / Q^-(\xi,t) < \lambda_0 \text{ glm. auf } \partial\Omega$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei wir

$$(6.15) \quad g^- := g \text{ für } t \leq 0 \text{ und } g^-(\cdot,\xi,t) := \hat{th} + g(\cdot,\xi,0) \text{ für } t \geq 0$$

gesetzt haben. Schließlich seien für $t \geq 0$ noch die Abschätzungen

$$(6.16) \quad \liminf_{\xi \rightarrow \infty} A^-(\cdot,\xi,t) > \lambda_0 \text{ gleichmäßig in } \Omega$$

und

$$(6.17) \quad \liminf_{\xi \rightarrow \infty} B^-(\cdot,\xi,t) > \lambda_0 \text{ gleichmäßig auf } \partial\Omega$$

erfüllt.

Dann existiert eine reelle Zahl t_0 , so daß $(6.1)_t$ für $t > t_0$ keine und für $t < t_0$ mindestens eine Lösung hat.

Bemerkungen:

1. (6.12) hat $Q^-(\infty) = \infty$ zur Folge, so daß also wegen $Q^-(-\infty) = -\infty$ Q^- ein C^2 -Diffeomorphismus von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ ist.

2. Die etwas unübersichtlichen Voraussetzungen vereinfachen sich erheblich, wenn man sich auf den Fall $f(x,\xi,\eta,t) = \hat{f}(x,\xi,\eta) + th(x)$ und $g(x,\xi,t) = \hat{g}(x,\xi) + \hat{th}(x)$ beschränkt. Dann nämlich stimmen A^- bzw. B^- mit den Klammerausdrücken in (6.13) bzw. (6.14) überein, und die Unterscheidung zwischen g und g^- wird hinfällig. Wegen Bemerkung 1 zu Korollar (5.4) sieht man nun sofort, daß (6.13) und (6.14)

die Bedingungen für die Existenz einer Unterlösung von (6.1) sind.

3. Eine Unterlösung existiert für alle $t \in \mathbb{R}$ aber auch im allgemeinen Fall. Man braucht nur zu bemerken, daß wegen $g^- \leq g$ (für $t \geq 0$ benutze man (6.5)) und $Q_\xi^- > 0$ sowie $Q^- < 0$ (letzteres für $\xi < 0$) aus (6.14) folgt

$$\limsup_{\xi \rightarrow -\infty} (Q_\xi^-(\xi, t) g(\cdot, \xi, t) + b_0 \kappa^-(\xi, t)) / Q^-(\xi, t) < \lambda_0 \quad \text{glm. auf } \partial\Omega.$$

4. Für $t \geq 0$ seien (6.13) und (6.14) noch einmal in anderer Form aufgeschrieben (man beachte (6.7) bis (6.9) sowie (6.15)):

$$(6.18) \quad \limsup_{\xi \rightarrow -\infty} A^-(\cdot, \xi, t) < \lambda_0 \quad \text{gleichmäßig auf } \Omega$$

und

$$(6.19) \quad \limsup_{\xi \rightarrow -\infty} B^-(\cdot, \xi, t) < \lambda_0 \quad \text{gleichmäßig auf } \partial\Omega.$$

5. Im mild nichtlinearen Fall können die Bedingungen des Theorems noch etwas abgeschwächt werden. Wir gehen später darauf ein.

Der Beweis des Theorems wird durch das folgende Lemma eingeleitet, das $t_0 > -\infty$ folgern hilft.

(6.2) Lemma

Unter den Voraussetzungen des Theorems hat $(6.1)_t$ für alle genügend kleinen t eine Oberlösung.

Beweis:

Aus (6.4) bzw. (6.5) folgt für $t \leq 0$, daß

$$f(\cdot, \xi, n, t) \leq th + f(\cdot, \xi, n, 0) \quad \text{in } \bar{\Omega}$$

$$\text{bzw.} \quad g(\cdot, \xi, t) \leq th + g(\cdot, \xi, 0) \quad \text{auf } \partial\Omega$$

für $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{N+1}$ gilt. Wegen der Wachstumseigenschaft in (6.2) kann man weiter schreiben

$$f(x, \xi, \eta, 0) \leq c(|\xi|, 0)(1 + |\eta|^2) \leq c_1(1 + \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) \eta_j^k)$$

für alle $|\xi| \leq 1$, $x \in \bar{\Omega}$ und $\eta \in \mathbb{R}^N$ mit einer geeigneten Konstanten $c_1 > 0$. Sei $\theta := \max_{\substack{x \in \partial\Omega \\ 0 \leq \xi \leq 1}} |g(x, \xi, 0)|$. Um die Behauptung zu beweisen,

reicht es, eine Lösung $u \in [0, \Pi]_{W_p^2(\Omega)}$ von

$$\begin{aligned} (6.20)_t \quad & Au \geq th(x) + c_1(1 + \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) D_j u D_k u) \quad \text{in } \Omega \\ & Bu \geq \tilde{th}(x) + \theta \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für ein $t \leq 0$ zu finden. u löst dann auch $(6.20)_\tau$ für $\tau \leq t$ und ist damit Oberlösung von $(6.1)_\tau$.

Um $(6.20)_t$ zu behandeln, betrachte man zunächst die Aufgabe

$$- \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) D_j D_k v + \sum_{j=1}^N a_j(x) D_j v \geq \|a_0\|_{C(\bar{\Omega})} + te^{-c_1} h(x) + c_1 \quad \text{in } \Omega$$

und suche eine Lösung $v \in W_p^2(\Omega)$ mit $0 \leq v \leq (1 - e^{-c_1})/c_1$.

Man findet ein solches v wie in [19, Lemma 3.9, cf. (3.11)] für ein genügend kleines $t \leq 0$.

Mit $u := \frac{1}{c_1} \log(c_1 e^{c_1 v} + 1) \in W_p^2(\Omega)$ gilt dann $0 \leq u \leq 1$, und u löst

$$\begin{aligned} - \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) D_j D_k u + \sum_{j=1}^N a_j(x) D_j u &\geq \|a_0\|_{C(\bar{\Omega})} + th(x) + \\ &+ c_1(1 + \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) D_j u D_k u) \end{aligned}$$

und damit wegen $\|a_0\|_{C(\bar{\Omega})} \geq -a_0(x)u$ auch die erste Ungleichung von $(6.20)_t$.

Wegen $u \in W_p^2(\Omega)$ liegt Bu in $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, also wegen $p > N$ in $C(\partial\Omega)$. Wenn man also, falls nötig, t noch verkleinert, erhält man $Bu - 0 \geq t \inf_{\partial\Omega} \tilde{h}$, da das Infimum größer als null ist. Daher löst u (6.20)_t. $\square$

Wir beginnen jetzt den Beweis des Theorems:

(a) Es sei $t \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß eine Oberlösung $\tilde{v} \in W_p^2(\Omega)$ von (6.1)_t existiert. Da f und g bzgl. $t \in \mathbb{R}$ monoton steigen (vgl. (6.4) und (6.5)), ist $\tilde{v}$ auch Oberlösung von (6.1)_{\tau} für $\tau \leq t$. Aus (6.13) und (6.14) folgt mit der Bemerkung 3 für jedes solche τ die Existenz einer Unterlösung $\bar{v} \in W_p^2(\Omega)$ mit $\bar{v} \leq \tilde{v}$. Dann hat (6.1)_{\tau} auch eine Lösung $u \in [\bar{v}, \tilde{v}]$ (vgl. Thm. (3.1)).

$t_0 := \sup \{ t \in \mathbb{R} \mid (6.1)_t \text{ hat eine Lösung} \}$ hat offenbar die verlangten Eigenschaften, falls $t_0 \in \mathbb{R}$. Wegen $t_0 > -\infty$ (s.o.) ist nur noch $t_0 < \infty$ zu zeigen.

Diese Behauptung soll durch ein Lemma vorbereitet werden. Zuvor jedoch noch zwei Bezeichnungen:

$$(6.21) \quad R(x, \zeta, t) := \zeta A^-(x, \xi, t) \quad \text{für} \quad (x, \xi, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \zeta = Q^-(\xi)$$

und

$$(6.22) \quad S(x, \zeta, t) := \zeta B^-(x, \xi, t) \quad \text{für} \quad x \in \partial\Omega \quad \text{und} \quad (\xi, t) \text{ wie oben.}$$

(6.3) Lemma

Unter den Voraussetzungen des Theorems (6.1) existieren Konstanten

$\hat{\rho}, \rho \in \mathbb{R}$, $\hat{\rho} > 0$, so daß für jede Lösung $v \in W_p^2(\Omega)$ zu einem $t \geq 0$ von

$$(6.23)_t \quad \begin{aligned} Av &\geq R(x, v, t) && \text{in } \Omega \\ Bv &\geq S(x, v, t) && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$v \geq t\hat{p} + p$$

richtig ist.

Bemerkung:

$(6.23)_t$ entsteht durch die Transformation $v = Q^-(u)$ eines Problems, das die Lösungen u von $(6.1)_t$ erfüllen. Durch die Abschätzung des Lemmas kommt man später unter der Annahme $t_0 = \infty$ zu einem Widerspruch.

Beweis von Lemma (6.3):

Für $t \geq 0$ gelten die Abschätzungen (6.16) bis (6.19). Aus (6.16) und (6.17) folgt die Existenz eines $\mu > \lambda_0$ sowie eines $\xi_+ > 0$ mit $A^-(x, \xi, 0) \geq \mu$ und $B^-(y, \xi, 0) \geq \mu$ für $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$ und $\xi \geq \xi_+$.

Es sei $\zeta_+ := Q^-(\xi_+) > 0$. Aus der Monotonie von Q^- folgt

$$(6.24) \quad R(x, \zeta, 0) = \zeta A^-(x, \xi, 0) \geq \mu \zeta$$

für $\zeta = Q^-(\xi) \geq \zeta_+$ und $x \in \Omega$; eine analoge Abschätzung gilt für S . Ebenso implizieren (6.18) und (6.19): Es gibt Konstanten $\gamma < \lambda_0$ und $\zeta_- < 0$ mit

$$R(x, \zeta, 0) \geq \gamma \zeta \quad \text{für } \zeta \leq \zeta_- \text{ und } x \in \Omega,$$

und analog für S .

Für beliebiges $t \geq 0$ gilt nun

$$R(\cdot, \zeta, t) - \gamma \zeta = R(\cdot, \zeta, 0) - \gamma \zeta + t Q_\xi^-(\xi) h.$$

$R(\cdot, \zeta, 0) - \gamma \zeta$ ist, wie oben gezeigt, für $\zeta \leq \zeta_-$ und $\zeta \geq \zeta_+$ durch 0

nach unten beschränkt; auf dem Kompaktum $\bar{\Omega} \times [\zeta_-, \zeta_+]$ existiert, da R stetig ist, natürlich auch eine untere Schranke, so daß es ein $r \in \mathbb{R}$ mit

$$R(\cdot, \zeta, t) - \gamma \zeta \geq r + t Q_{\xi}^{-}(\xi) h \quad \text{in } \Omega \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{R} \quad \text{und } t \geq 0$$

gibt. Genauso zeigt man für ein geeignetes $s \in \mathbb{R}$

$$S(\cdot, \zeta, t) - \gamma \zeta \geq s + t Q_{\xi}^{-}(\xi) \tilde{h} \quad \text{auf } \partial\Omega \quad \text{für } \zeta, t \text{ wie oben.}$$

Die lineare Randwertaufgabe

$$(A - \gamma)z = r \quad \text{in } \Omega$$

$$(B - \gamma)z = s \quad \text{auf } \partial\Omega$$

hat, da γ kleiner als der kleinste Eigenwert λ_0 ist, genau eine Lösung $z \in W_p^2(\Omega)$.

$v \in W_p^2(\Omega)$ sei eine Lösung von (6.23)_t für ein $t \geq 0$. Es ist dann mit $u := (Q^-)^{-1}(v)$

$$(A - \gamma)(v - z) \geq R(\cdot, v, t) - \gamma v - r = t Q_{\xi}^{-}(u) h \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

und ebenso

$$(B - \gamma)(v - z) \geq t Q_{\xi}^{-}(u) \tilde{h} \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Die Anwendung des verallgemeinerten Maximumprinzips [27, p. 72] kombiniert mit dem Bony'schen Maximumprinzip [9] liefert $v \geq z$; denn setzt man $w := (v - z)/\phi$, so gilt

$$- \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) D_j D_k w + \sum_{j=1}^N \left(\frac{-2}{\phi(x)} \right) \sum_{k=1}^N a_{jk}(x) D_k \phi + a_j(x) D_j w + (\lambda_0 - \gamma)w \geq 0$$

in Ω und

$$\frac{\partial w}{\partial \beta} + (\lambda_0 - \gamma)w \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und damit $w \geq 0$. Es folgt $v \geq \rho := \min_{\Omega} z$, also $u \geq (Q^-)^{-1}(\rho)$, wobei die rechten Seiten der beiden Ungleichungen unabhängig von $t \geq 0$ sind. Zusammen mit (6.12) ergibt sich daraus mit einem geeigneten, wiederum von $t \geq 0$ unabhängigen $M > 0$

$$Q_{\xi}^-(u) = \exp \left(\int_0^u b^-(y,0) dy \right) \geq M.$$

Sei $\tilde{z} \in W_p^2(\Omega)$ die Lösung von

$$(A - \gamma)\tilde{z} = Mh \quad \text{in } \Omega$$

$$(B - \gamma)\tilde{z} = M\hat{h} \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Sicherlich ist $\tilde{z} \neq 0$, und wegen $h, \hat{h} > 0$ liefert das verallgemeinerte Maximumprinzip sogar $\tilde{z}(x) > 0$ für alle $x \in \bar{\Omega}$. Damit ist

$$(A - \gamma)(v - z - t\tilde{z}) \geq tQ_{\xi}^-(u)h - tMh \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\text{und} \quad (B - \gamma)(v - z - t\tilde{z}) \geq tQ_{\xi}^-(u)\hat{h} - tM\hat{h} \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Es folgt wie behauptet $v \geq t\tilde{z} + z \geq t\hat{\rho} + \rho$ mit $\hat{\rho} := \inf_{\Omega} \tilde{z} > 0$. $\square$

Wir setzen nun den Beweis des Theorems fort:

(b) Zu zeigen ist noch $t_0 < \infty$. Falls dies falsch sein sollte, gibt es für jedes $t \geq 0$ eine Lösung $u \in W_p^2(\Omega)$ von $(6.1)_t$. Es gilt dann auch

$$Au \geq th(x) + F^-(x, u, 0) + b^-(u, 0) \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) D_j u D_k u \quad \text{in } \Omega$$

$$Bu \geq t\hat{h}(x) + g(x, u, 0) \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Setzt man $v := Q^-(u) \in W_p^2(\Omega)$, so erhält man

$$Av \geq Q_{\xi}^-(u)(th(x) + F^-(x, u, 0)) + a_0(x)\kappa^-(u) = R(x, v, t) \quad \text{in } \Omega$$

$$Bv \geq Q_{\xi}^-(u)(t\hat{h}(x) + g(x, u, 0)) + b_0(x)\kappa^-(u) = S(x, v, t) \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Die Anwendung der Green'schen Formel (4.4) liefert daher

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} v(A' - \lambda_0)\psi \, dx + \int_{\partial\Omega} v(B' - \lambda_0 c_0)\psi \, d\sigma \\ &\geq \int_{\Omega} \psi(R(x,v,t) - \lambda_0 v) \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 \psi(S(x,v,t) - \lambda_0 v) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Wir werden nun zeigen, daß die rechte Seite für große t positiv wird, wodurch die Annahme $t_0 = \infty$ als falsch erkannt ist.

Aus (6.24) folgen für reelle Zahlen $\mu > \lambda_0$ und $\zeta_+ > 0$ die Abschätzungen

$$R(\cdot, \zeta, t) \geq R(\cdot, \zeta, 0) \geq \mu \zeta \quad \text{in } \Omega$$

$$\text{und} \quad S(\cdot, \zeta, t) \geq S(\cdot, \zeta, 0) \geq \mu \zeta \quad \text{auf } \partial\Omega$$

für $\zeta \geq \zeta_+$ und $t \geq 0$. Mit der Ungleichung aus dem Lemma (6.3)

$v \geq t\bar{\rho} + \rho$ gilt für $t \geq t_1 := \max\{0, (\zeta_+ - \rho)/\bar{\rho}\}$ sogar $v \geq \zeta_+$.

Für diese t schätzt man die Integrale oben also weiter ab durch

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\Omega} \psi(\mu - \lambda_0)v \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 \psi(\mu - \lambda_0)v \, d\sigma \\ &\geq (\mu - \lambda_0) \zeta_+ \left(\int_{\Omega} \psi \, dx + \int_{\partial\Omega} c_0 \psi \, d\sigma \right) \\ &> 0, \quad \text{Widerspruch! } \square \end{aligned}$$

Weitere Bemerkungen zum Theorem (6.1):

6. In [19, § 3] wird, wie schon oben bemerkt, das Dirichlet-Problem mit homogenen Randbedingungen für eine ähnliche Differentialgleichung behandelt. Die oben angegebenen Beweise entsprechen denen in [19], sind zum Teil aber einfacher, weil hier wegen der nichtlinearen Randbedingungen das Dirichletproblem ausgeschlossen ist; insbesondere gilt hier das Maximumprinzip in einer schärferen Form was sich z. B. in " $\bar{\rho} > 0$ " im Lemma (6.3) manifestiert. Die Abschätzung, die in [19] der des Lemmas entspricht, lautet $v \geq t\bar{z} + \rho$ mit einer in Ω posi-

tiven Funktion $\bar{z}$, die Nullrandwerte hat. Dadurch entstehen insbesondere größere Schwierigkeiten bei der Abschätzung der Integrale im Teil (b) des Beweises des Theorems.

7. Die Voraussetzungen an die Inhomogenitäten, wie sie sich in (6.13), (6.14) sowie (6.16) und (6.17) darstellen, leiten sich von den Bedingungen (5.16) und (5.18) des Korollars (5.4) ab. Natürlich hätte man auch (5.17) und (5.19) zum Ausgangspunkt wählen können, um dieselben Ergebnisse zu erhalten.

8. Die Voraussetzungen (6.16) und (6.17) des Theorems sollen für $t \geq 0$ richtig sein. Es würde auch reichen, deren Gültigkeit nur für $t \geq t_1$ vor auszusetzen mit einem festen $t_1 \in \mathbb{R}$.

9. Die Bedingungen des Theorems scheinen in einer Hinsicht etwas merkwürdig zu sein: Auf der einen Seite (i.e. (6.13) und (6.14) für $t \leq 0$) rechnet man mit den Inhomogenitäten in ihrer ursprünglichen t -Abhängigkeit, für $t \geq 0$ aber ((6.16) bis (6.19)) werden "in t linearisierte" rechte Seiten benutzt, die über (6.4) und (6.5) mit f und g zusammenhängen. Der Grund: Im Beweis wird laufend durch Substitution mit Q^- auf mild nichtlineare Differentialgleichungen transformiert, wobei diese Transformation von $t \geq 0$ unabhängig sein muß. Daher lassen sich auch die Einschränkungen an F^- und b^- in (6.7) nicht vermeiden.

Es liegt nun nahe zu vermuten, daß die Aussage des Theorems auch unter schwächeren Voraussetzungen richtig bleibt, wenn nur die t -Unabhängigkeit der Transformation gewährleistet ist. Ein solcher Fall liegt (außer in Bemerkung 2) bei mild nichtlinearen Randwertaufgaben vor, wo

überhaupt nicht transformiert zu werden braucht. Dafür wollen wir das folgende Ergebnis angeben, das eine zu erwartende Verallgemeinerung von [20, Cor. 3.11] auf nichtlineare Randbedingungen darstellt, auf dessen Beweis wir aber verzichten wollen, da er letztlich schon in den Überlegungen dieses Paragraphen enthalten ist.

(6.4) Satz

$f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und bzgl. $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei lokal lipschitzstetig bzgl. $(x, \xi) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ und stetig differenzierbar bzgl. $t \in \mathbb{R}$. Ferner gelte

- (i) Für jedes $m \in \mathbb{R}$ existieren in Ω bzw. auf $\partial\Omega$ positive Funktionen $h \in C(\bar{\Omega})$ bzw. $h' \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ mit

$$f_t(\cdot, \xi, t) \geq h \quad \text{in } \Omega$$

$$\text{bzw.} \quad g_t(\cdot, \xi, t) \geq h' \quad \text{auf } \partial\Omega$$

für $\xi \geq m$ und $t \in \mathbb{R}$;

- (ii) $\limsup_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{f(\cdot, \xi, t)}{\xi} < \lambda_0$ gleichmäßig in Ω ,

$$\limsup_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{g(\cdot, \xi, t)}{\xi} < \lambda_0 \quad \text{gleichmäßig auf } \partial\Omega$$

für alle $t \in \mathbb{R}$;

- (iii) $\liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{f(\cdot, \xi, t)}{\xi} > \lambda_0$ gleichmäßig in Ω ,

$$\liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{g(\cdot, \xi, t)}{\xi} > \lambda_0 \quad \text{gleichmäßig auf } \partial\Omega$$

für alle $t \geq 0$.

Dann existiert ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so daß

$$Au = f(x, u, t) \quad \text{in } \Omega$$

$$Bu = g(x, u, t) \quad \text{auf } \partial\Omega$$

für $t < t_0$ mindestens eine, für $t > t_0$ jedoch keine Lösung hat. $\square$

7. Ein Multiplizitätssatz für mild nichtlineare elliptische Aufgaben

Ausgehend von der im Satz (6.4) behandelten Aufgabe

$$(7.1)_t \quad \begin{aligned} Au &= f(x, u, t) && \text{in } \Omega \\ Bu &= g(x, u, t) && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

wollen wir, wie schon angekündigt, für gewisse $t \in \mathbb{R}$ die Existenz mindestens zweier Lösungen zeigen. In [8] erhalten die Autoren ein analoges Resultat für $g = 0$, wenn B der Dirichlet- oder Neumann-Randoperator ist; für weitere Spezialfälle vergleiche man das Literaturverzeichnis von [8].

Aus beweistechnischen Gründen müssen wir die Regularitätsvoraussetzungen an Ω und die Koeffizienten von A und B gegenüber den früheren Paragraphen etwas verschärfen. Im einzelnen sei für ein $\alpha \in (0, 1)$ Ω eine nichtleere, offene, beschränkte Menge der Klasse $C^{3+\alpha}$; der gleichmäßig stark elliptische Differentialoperator A , wie er in § 1 definiert worden ist, habe Koeffizienten $a_{jk} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_j \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $1 \leq j, k \leq N$, und $a_0 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. Für B gelte zusätzlich $\beta \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $b_0 \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$.

Aus der Schauder-Theorie zur Behandlung elliptischer Randwertprobleme (e.g. [16, 22]) folgt in dieser Situation, daß die Eigenfunktionen ϕ und ψ zum Eigenwert λ_0 (vgl. § 4) sogar in $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ liegen. Außerdem steht uns neben der üblichen L_p -Abschätzung [2] jetzt noch eine a-priori-Abschätzung für die $W_p^1(\Omega)$ -Norm zur Verfügung [6, Prop.(3.3)], deren Konsequenzen später wichtig werden.

(7.1) Theorem

$f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und stetig differenzierbar bzgl. $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
 $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei lokal lipschitzstetig bzgl. $(x, \xi) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ und
 stetig differenzierbar bzgl. $t \in \mathbb{R}$. Ferner mögen für jedes $m \in \mathbb{R}$ Funktionen $h \in C(\bar{\Omega})$ und $\hat{h} \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ mit

$$(7.2) \quad f_t(x, \xi, t) \geq h(x) > 0 \quad \text{für } (x, \xi, t) \in \Omega \times [m, \infty) \times \mathbb{R}$$

und

$$(7.3) \quad g_t(x, \xi, t) \geq \hat{h}(x) > 0 \quad \text{für } (x, \xi, t) \in \partial\Omega \times [m, \infty) \times \mathbb{R}$$

existieren. Außerdem seien

$$(7.4) \quad \limsup_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{f(\cdot, \xi, t)}{\xi} < \lambda_0,$$

$$(7.5) \quad \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{f(\cdot, \xi, t)}{\xi} > \lambda_0,$$

$$(7.6) \quad \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{f(\cdot, \xi, t)}{\xi} < \infty$$

gleichmäßig in Ω und t in beschränkten Intervallen sowie

$$(7.7) \quad \limsup_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{g(\cdot, \xi, t)}{\xi} < \lambda_0,$$

$$(7.8) \quad \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{g(\cdot, \xi, t)}{\xi} > \lambda_0 \quad \text{und}$$

$$(7.9) \quad \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{g(\cdot, \xi, t)}{\xi} < \infty$$

gleichmäßig auf $\partial\Omega$ und t in beschränkten Intervallen richtig.

Dann existiert eine reelle Zahl $t_0 \in \mathbb{R}$, so daß $(7.1)_t$ für $t > t_0$ keine, für $t = t_0$ mindestens eine und für $t < t_0$ mindestens zwei verschiedene Lösungen hat.

Bemerkungen:

1. Natürlich sind wieder verschiedene Modifikationen der Voraussetzungen möglich; man vergleiche z. B. Bemerkung 7 zu Theorem (6.1).
2. Der Unterschied zwischen Satz (7.1) und [8] besteht darin, daß wir nichtlineare Randbedingungen und etwas allgemeinere Randoperatoren zulassen. Für den Beweis bedeutet das nicht viel: im wesentlichen müssen nur die der Aufgabe $(7.1)_t$ angepaßten Operatoren und Funktionenräume bestimmt werden; dies geschieht in den Abschnitten (a) und (b) des Beweises.

Beweis von Theorem (7.1):

(a) Gemäß Satz (6.4) existiert $t_0 \in \mathbb{R}$, so daß $(7.1)_t$ keine Lösung für $t > t_0$, jedoch mindestens eine für $t < t_0$ hat. Sei $t^* < t_0$ fest, und man wähle $\tau \in (t^*, t_0)$. Eine Lösung $\hat{v} \in W_p^2(\Omega)$ von $(7.1)_\tau$ ist dann wegen der strikten Monotonie von f und g in t (vgl. (7.2), (7.3)) eine strikte Oberlösung von $(7.1)_{t^*}$. Korollar (5.4) impliziert mit (7.4) und (7.7) jetzt die Existenz einer strikten Unterlösung $\bar{v}$ mit $\bar{v} < \hat{v}$.

(b) Wählt man ω_0 groß genug, so sind $f + \omega_0 \text{id}_\xi$ und $g + \omega_0 \text{id}_\xi$, $\text{id}_\xi(x, \xi, t) := \xi$, bzgl. $\xi \in [\min_{\bar{\Omega}} \bar{v}, \max_{\bar{\Omega}} \hat{v}]$ für $t = t^*$ strikt monoton steigend. Setze

$$\omega := \max \{ \omega_0, \|a_0\|_{C(\bar{\Omega})}, \|b_0\|_{C(\partial\Omega)} \} + 1$$

und

$$F(u, t) := f(\cdot, u, t) + \omega u, \quad u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$G(v, t) := g(\cdot, v, t) + \omega v, \quad v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Nemytskii-Operatoren $F(\cdot, t^*)$ und $G(\cdot, t^*)$ sind

dann stetig und strikt wachsend auf $X := [\bar{V}, \bar{V}] \cap C(\bar{\Omega})$; in G sind natürlich die Spuren auf $\partial\Omega$ von Funktionen aus X einzusetzen.

$K(c, d)$ sei die (nach Wahl von ω) eindeutig bestimmte Lösung der linearen Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}(A + \omega)u &= c \quad \text{in } \Omega \\ (B + \omega)u &= d \quad \text{auf } \partial\Omega,\end{aligned}$$

wobei wegen Schauder- und L_p -Theorie

$$K \in \mathcal{L}(L_p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega), W_p^2(\Omega)) \cap \mathcal{L}(C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^{1+\alpha}(\partial\Omega), C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}))$$

gilt. Es gibt sogar eine eindeutig bestimmte Erweiterung von K , die wieder mit K bezeichnet werden soll, so daß

$$K \in \mathcal{L}(C(\bar{\Omega}) \times C(\partial\Omega), W_p^1(\Omega))$$

ist (vgl. [6, § 4]; dies ist eine Folgerung aus der eingangs erwähnten W_p^1 -Abschätzung). Setzt man $K_0 u := K(u, u|_{\partial\Omega})$, so ist $K \in \mathcal{K}(C(\bar{\Omega}))$ ein kompakter linearer Operator, da $W_p^1(\Omega)$ kompakt in $C(\bar{\Omega})$ eingebettet ist. Ferner ist K_0 fast stark positiv ([6, pp. 58-59]), dann aber wegen $\ker K_0 = 0$ sogar stark positiv.

Sei $S: C(\bar{\Omega}) \times \mathbb{R} \rightarrow W_p^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ durch

$$S(u, t) := K(F(u, t), G(u, t)) \quad , \quad u \in C(\bar{\Omega}), t \in \mathbb{R}$$

definiert. Durch bekannte "bootstrapping" - Argumente sieht man schnell, daß $u \in W_p^2(\Omega)$ genau dann $(7.1)_t$ löst, wenn $u = S(u, t)$ mit $u \in C(\bar{\Omega})$ gilt. Ferner ist S eine stetige Abbildung, die beschränkte auf relativ-kompakte Mengen in $C(\bar{\Omega})$ abbildet, und $T := S(\cdot, t^*)$ ist auf X stark wachsend. Außerdem gilt

$$\bar{v} < T(\bar{v}) \quad \text{und} \quad \hat{v} > T(\hat{v}),$$

woraus insbesondere $T(X) \subset X$ folgt. Da auch $\overline{T(X)}$ kompakt in $C(\bar{\Omega})$ ist, hat T aufgrund des Schauder'schen Fixpunktsatzes (e.g. [4, p. 660]) einen Fixpunkt $u_0 \in X$. Da T auf X stark wächst, folgt sofort $u_0 \in \tilde{X}$ wegen $\bar{v} < u_0 < \hat{v}$.

(c) Zu zeigen ist die Existenz eines zweiten Fixpunktes von T in $C(\bar{\Omega})$, der ja ebenfalls eine Lösung von $(7.1)_{t^*}$ liefert. O. b. d. A. sei u_0 der einzige Fixpunkt in X ; für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ ist dann der Leray-Schauder-Abbildungsgrad $\deg(\text{id} - T, u_0 + \varepsilon B, 0)$, $B := B_{C(\bar{\Omega})}(0, 1)$, ebenso wie der lokale Fixpunktindex, wohldefiniert und gleich 1 (vgl. [8]).

(d) Falls es - was noch später zu zeigen ist - ein $\rho > 0$ gibt, so daß $u_0 + \varepsilon B \subset \rho B$ und

(7.10) $S(u, t) \neq u$ für $t \in I := [t^*, t_0 + 1]$ und $u \in \rho \partial B$, gilt, so zeigt man mit Hilfe der Additivität und der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades sowie der Tatsache, daß $S(\cdot, t_0 + 1)$ keine Fixpunkte hat, daß

$$\deg(\text{id} - T, \rho B \setminus (u_0 + \varepsilon B), 0) = -1$$

richtig ist, woraus die Existenz eines von u_0 verschiedenen Fixpunktes von T folgt.

Zu zeigen ist noch die Gültigkeit der Annahme (7.10) für ein geeignetes $\rho > 0$. Zunächst noch einige Vorüberlegungen:

(e) Wir erinnern daran, daß K_0 einen positiven Spektralradius hat, weil es ein stark positiver Operator ist; genauer gilt $r(K_0) = \frac{1}{\lambda_0 + \omega}$.

(7.4) und (7.7) haben die Existenz von reellen Zahlen $\xi_- < 0$ und $0 < \mu < \lambda_0 + \omega$ mit

$$f(\cdot, \xi, t) + \omega \xi \geq \mu \xi \quad \text{in } \Omega$$

und $g(\cdot, \xi, t) + \omega \xi \geq \mu \xi$ auf $\partial\Omega$

für $\xi \leq \xi_-$ und $t \in I$ zur Folge. (7.5) und (7.8) implizieren dieselben Ungleichungen auch noch für $\xi \geq \xi_+$ mit einem geeigneten $\xi_+ > 0$.

Wählt man nun $k \geq 0$ groß genug, so hat man

$$(7.11) \quad \begin{aligned} F(u, t) &\geq \mu u - k \\ G(u, t) &\geq \mu u - k \end{aligned}$$

für $t \in I$ und $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ (evtl. im Sinne der Spurbildung).

Wegen $\frac{1}{\mu} > r(K_0)$ hat die Gleichung

$$w - \mu K_0 w = -k K_0 \mathbb{1}$$

genau eine Lösung $w \in C(\bar{\Omega})$. Für einen beliebigen Fixpunkt u_t von $S(\cdot, t)$ für ein $t \in I$ folgt aus der Wachstumseigenschaft von K_0 und aus (7.11)

$$u_t - w \geq \mu K_0 (u_t - w) .$$

Da $\frac{1}{\mu} > r(K_0)$ hat die Aufgabe $z - \mu K_0 z = a$ für $a \geq 0$ gemäß [4, Thm. 3.2] nur eine nichtnegative Lösung; also ist

$$(7.12) \quad w \leq u_t \quad \text{für alle } t \in I .$$

(f) Falls nun (7.10) nicht richtig sein sollte, gibt es Folgen

$(t_j) \subset I$ und $(u_j) \subset C(\bar{\Omega})$ mit $\|u_j\|_{C(\bar{\Omega})} \rightarrow \infty$ und $u_j = S(u_j, t_j)$.

Setze $v_j := u_j / \|u_j\|_{C(\bar{\Omega})}$. Aus (7.11), (7.6) und (7.9) folgt die

Beschränktheit der Mengen $\{ F(u_j, t_j) / \|u_j\|_{C(\bar{\Omega})} \mid j \in \mathbb{N} \}$ in $C(\bar{\Omega})$ und $\{ G(u_j, t_j) / \|u_j\|_{C(\bar{\Omega})} \}$ in $C(\partial\Omega)$. Folglich ist wegen der Kompaktheit von K (aufgefaßt als Operator mit Werten in $C(\bar{\Omega})$) und wegen

$$v_j = \|u_j\|_{C(\bar{\Omega})}^{-1} K(F(u_j, t_j), G(u_j, t_j))$$

die Folge (v_j) in $C(\bar{\Omega})$ relativkompakt, die damit o. E. gegen ein $v \in C(\bar{\Omega})$ konvergiert. Aus (7.12) folgt im Limes $j \rightarrow \infty$

$$(7.13) \quad v \geq 0.$$

(7.4), (7.5), (7.7) sowie (7.8) haben nun ähnlich wie oben die Existenz von Konstanten $\alpha > 0$ und $\iota \geq 0$ zur Folge, so daß

$$F(u, t) \geq (\lambda_0 + \omega + \alpha)u - \iota$$

$$G(u, t) \geq (\lambda_0 + \omega + \alpha)u - \iota$$

für $t \in I$ und $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt. Dann ist

$$v_j = \|u_j\|_{C(\bar{\Omega})}^{-1} S(u_j, t_j) \geq (\lambda_0 + \omega + \alpha) K_0 v_j - \|u_j\|_{C(\bar{\Omega})}^{-1} \iota K_0 \mathbb{1},$$

so daß im Grenzfall $j \rightarrow \infty$

$$v - (\lambda_0 + \omega + \alpha) K_0 v \geq 0$$

folgt. Diese Ungleichung aber hat wegen [4, Thm. 3.2] keine positive Lösung, so daß sich mit (7.13) $v = 0$ ergibt, was $\|v\|_{C(\bar{\Omega})} = 1$ widerspricht. $\rho > 0$ existiert also wie in (7.10) gefordert.

(g) Um zu zeigen, daß $(7.1)_{t_0}$ mindestens eine Lösung hat, wähle man eine Folge $(t_j) \subset I$, die gegen t_0 konvergiert, und die Folge $(u_j) \subset W_p^2(\Omega)$ der Lösungen von $(7.1)_{t_j}$, d.h. $u_j = S(u_j, t_j)$.

Wie in (f) zeigt man, daß (u_j) in $C(\bar{\Omega})$ beschränkt, also wegen der Kompaktheitseigenschaft von S auch relativkompakt ist. Dann erfüllt

jeder Häufungspunkt u von (u_j) - mindestens einen solchen gibt es ja -

$u = S(u, t_0)$ und löst damit auch $(7.1)_{t_0}$. $\square$

Rekapitulieren wir den Beweis, so stellen wir fest, daß die wesentliche Rolle eine wachsende Abbildung $S: D \times \mathbb{R} \rightarrow E$ spielt, die auf einer nicht zu "kleinen" Teilmenge D eines Ordnungsbanachraumes E definiert ist und zusätzliche strukturelle Eigenschaften hat. Die Fixpunkte von $S(\cdot, t)$ liefern die gesuchten Lösungen für festes $t \in \mathbb{R}$.

Betrachten wir das semilineare Problem

$$(7.14) \quad \begin{aligned} Au &= f(x, u, Du, t) && \text{in } \Omega \\ Bu &= g(x, u, t) && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

und versuchen, dafür ein zu Theorem (7.1) analoges Resultat zu beweisen, sehen wir, daß die obigen Methoden scheitern müssen. Transformiert man nämlich (7.14) auf eine Fixpunktgleichung in der Art, wie es z. B. durchweg in [29] (vgl. insbesondere die Seiten 267 und 287 dieser Arbeit) geschieht, ist der die Gleichung vermittelnde Operator zwar auf einem ganzen Funktionenraum definiert, aber nicht wachsend. Verwendet man dagegen den wachsenden Fixpunktoperator, der im zweiten Paragraphen konstruiert wurde, besteht der Definitionsbereich i. a. höchstens aus $[\bar{v}, \hat{v}] \times \mathbb{R}$, wobei die Unter- und die Oberlösung a priori bekannt sein müssen. Da wir den zweiten Fixpunkt (d.h. die zweite Lösung) für $t < t_0$ i.a. außerhalb von $[\bar{v}, \hat{v}]$ zu erwarten haben (vgl. Teil (d) des obigen Beweises), ist dieser Definitionsbereich zu "klein".

Literaturverzeichnis

- [1] R.A. ADAMS: "Sobolev spaces". Academic Press, New York, 1975

- [2] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623 - 727

- [3] H. AMANN: On the existence of positive solutions of nonlinear boundary value problems. Indiana Univ. Math. J. 21 (1971), 125 - 146

- [4] -----: Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. SIAM Rev. 18 (1976), 620 - 709

- [5] -----: Existence and multiplicity theorems for semilinear elliptic boundary value problems. Math. Z. 150 (1976), 281 - 295

- [6] -----: Nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions. in: Proc. of the 2nd Scheveningen Conf. on Diff. Equ., pp. 43 - 63. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976

- [7] -----/M.G. CRANDALL: On some existence theorems for semilinear elliptic equations. Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), 779 - 790

- [8] -----/P. HESS: A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems. Erscheint demnächst

- [9] J.-M. BONY: Principe de maximum dans les espaces de Sobolev.
CRAS Paris 265 A (1967), 333 - 336
- [10] H. BREZIS/L. NIRENBERG: Characterizations of the ranges of some
nonlinear operators and applications to boundary
value problems. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. IV,
5 (1978), 225 - 326
- [11] H. BRILL: On the solvability of semilinear elliptic equations
with nonlinear boundary conditions. Math. Ann.
222 (1976), 37 - 48
- [12] J. DEUEL/P. HESS: A criterion for the existence of solutions of
nonlinear elliptic boundary value problems.
Proc. Royal Soc. Edinburgh Sec. A 74 (1976), 49 - 54
- [13] J. DUGUNDJI: An extension of Tietze's theorem. Pacific J. Math.
1 (1951), 353 - 367
- [14] D.G. deFIGUEIREDO/J.G. GOSSEZ: Nonlinear perturbations of a linear
elliptic problem near its first eigenvalue.
J. Diff. Eq. 30 (1978), 1 - 19
- [15] A. FRIEDMAN: "Partial differential equations". Academic Press,
New York, 1969
- [16] D. GILBARG/N.S. TRUDINGER: "Elliptic partial differential equations
of second order". Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1977
- [17] P. HESS: On the solvability of nonlinear elliptic boundary
value problems. Indiana Univ. Math. J. 25 (1976),
461 - 466

- [18] P. HESS: On a second order nonlinear elliptic boundary value problem. in: "Nonlinear Analysis: A collection of papers in honor of E. Rothe", pp. 99 - 107, Academic Press, New York, 1978
- [19] J.L. KAZDAN/R.J. KRAMER: Invariant criteria for the existence of solutions to second order quasilinear elliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 31 (1978), 619 - 645
- [20] -----/F.W. WARNER: Remarks on some quasilinear equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975), 567 - 597
- [21] R.J. KRAMER: Sub- and supersolutions of quasilinear elliptic boundary value problems. *J. Diff. Eq.* 28 (1978), 278 - 283
- [22] O.A. LADYZHENSKAYA/N.N. URAL'TSEVA: "Linear and quasilinear elliptic equations". Academic Press, New York, 1968
- [23] E.M. LANDESMAN/A.C. LAZER: Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance. *J. Math. Mech.* 19 (1970), 609 - 623
- [24] J.L. LIONS/E. MAGENES: Problemi ai limiti non omogenei (III). *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. III*, 15 (1961), 39 - 101
- [25] -----/-----: "Non-homogenous boundary value problems and applications. I." Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1972
- [26] C. MIRANDA: "Partial differential equations of elliptic type". Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1970

- [27] M.H. PROTTER/H.F. WEINBERGER: "Maximum principles in differential equations". Prentice Hall, N. Y., 1967

- [28] J.-P. PUEL: Sur des problèmes quasilinéaires elliptiques et paraboliques d'ordre 2. CRAS Paris 275 A (1972), 179 - 182

- [29] K. SCHMITT: Boundary value problems for quasilinear second order equations. Nonlinear Anal. 2 (1978), 263 - 309

- [30] F. TOMI: Über semilineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. 111 (1969), 350 - 366

Lebenslauf

Am 13. 3. 1954 wurde ich in Gelsenkirchen geboren; meine Eltern sind Johanna Inkmann, geb. Imann, und Friedhelm Inkmann. In Gelsenkirchen besuchte ich von 1960 bis 1964 die Grundschule, danach von 1964 bis 1972 das Schalcker Gymnasium, wo ich im Mai 1972 die Reifeprüfung ablegte.

Seit dem WS 72/73 studiere ich an der Ruhr-Universität Bochum die Fächer Mathematik und Physik und bestand am 13. 5. 1974 die Vordiplom- und am 30. 9. 1977 die Diplomprüfung in Mathematik. Am 1. 12. 1977 legte ich das 1. Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern Mathematik und Physik ab. Am selben Tag wurde ich als Verwalter einer Wissenschaftlichen Assistentenstelle am Lehrstuhl von Prof. Dr. H. Amann eingestellt.

lifo
druck

laubanger 15
8600 bamberg
tel.: 0951/6 43 21